





Seinem hochverehrten Freunde O. v. Struve vom Verf.

P. A. HANSEN

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

GEODÄTISCHE UNTERSUCHUNGEN.

Des VIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1865.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

ERSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Erster Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. 24 Ngr.
P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 12 Ngr.
A. SEEBECK, über die Querschwingungen elastischer Stäbe. 10 Ngr.
C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 10 Ngr.
W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1 Thlr.
F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. 20 Ngr.
M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. 16 Ngr.
W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus.) 20 Ngr.

ZWEITER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Erster Band. Mit einer Karte. hoch 4. 1850. broch. Preis 6 Thlr.

A. WESTERMANN, Untersuchungen über die in die attischen Redner eingelegten Urkunden. 2 Abhandlungen. 1 Thlr.
F. A. UKERT, über Dämonen, Heroen und Genien. 24 Ngr.
TH. MOMMSEN, über das römische Münzwesen. 1 Thlr. 20 Ngr.
E. v. WIETERSHEIM, der Feldzug des Germanicus an der Weser. 1 Thlr.
G. HARTENSTEIN, Darstellung der Rechtsphilosophie des Hugo Grotius. 20 Ngr.
TH. MOMMSEN, über den Chronographen vom Jahre 354. Mit einem Anhange über die Quellen der Chronik des Hieronymus. 1 Thlr. 10 Ngr.

DRITTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Zweiter Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1857. broch. Preis 7 Thlr. 10 Ngr.

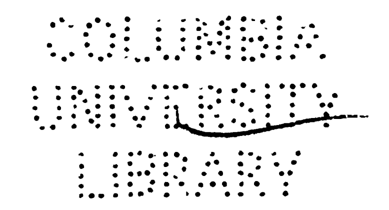
W. ROSCHER, zur Geschichte der Englischen Volkswirthschaftslehre im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert 1851. 1 Thlr.
——— Nachträge. 1852. 8 Ngr.
J. G. DROYSEN, Eberhard Windeck. 1853. 24 Ngr.
TH. MOMMSEN, Polemii Silvii laterculus. 1853. 16 Ngr.
——— Volusii Maeciani distributio partium. 1853. 6 Ngr.
J. G. DROYSEN, zwei Verzeichnisse, Kaiser Karls V. Lande, seine und seiner Grossen Einkünfte und anderes betreffend. 1854. 20 Ngr.
TH. MOMMSEN, die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica. 1855. 1 Thlr.
——— Nachträge. 1855. 16 Ngr.
FRIEDRICH ZARNCKE, Die urkundlichen Quellen zur Geschichte der Universität Leipzig in den ersten 150 Jahren ihres Bestehens. 1857. 3 Thlr.

VIERTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Zweiter Band. Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. br. Preis 6 Thlr. 20 Ngr.

M. W. DROBISCH, über musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 1 Thlr.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 1 Thlr. 10 Ngr.
P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 1 Thlr.
——— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2+r'^2-2rr'(\cos U\cos U'+\sin U\sin U'\cos J)$. 1854. 1 Thlr.
O. SCHLÖMILCH, über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 8 Ngr.
——— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 16 Ngr.
P. A. HANSEN, die Theorie des Aequatoreals. 1855. 24 Ngr.
C. F. NAUMANN, über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 10 Ngr.
A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 20 Ngr.

FÜNFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Dritter Band. Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. br. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 12 Ngr.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 1 Thlr. 20 Ngr.
R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 16 Ngr.
H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 24 Ngr.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: über die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 2 Thlr.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.



GEODÄTISCHE UNTERSUCHUNGEN.

VON

P. A. HANSEN

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des VIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1865.

Vom Verfasser übergeben den 15. März 1865.
Der Abdruck vollendet den 24. August 1865.

Inhaltsverzeichniss.

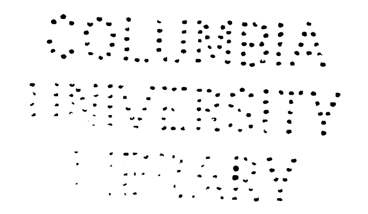
Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

GEODÄTISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

P. A. HANSEN.



Da zu Anfang eines jeden der vier Abschnitte, in welche diese Abhandlung eingetheilt ist, der Inhalt derselben ausführlich dargelegt wird, so ist hier wenig darüber nachzuholen. Ich führe nur an, dass im ersten Abschnitte eine in neuerer Zeit mehrfach behandelte geodätische Aufgabe vorgenommen wird, deren hier ausgeführte Auflösung dennoch, wie ich glaube, mehreres Neue enthält. Die Aufgaben des zweiten und vierten Abschnittes sind meines Wissens nach, in der neueren Zeit, wenigstens in Deutschland, nicht behandelt worden, obgleich sie in älteren Schriften über Geodäsie und sphäroidische Trigonometrie vorkommen; die Auflösungen, die ich von diesen, an sich indirecten, Aufgaben gebe, machen sich dadurch bemerklich, dass sie schon in der ersten Annäherung so genaue Resultate geben, dass wohl nie die Durchführung einer zweiten Annäherung erforderlich sein wird, obgleich denselben die grösst mögliche Ausdehnung gegeben worden ist.

Im dritten Abschnitt wird die Reduction der sphäroidischen Dreiecke auf sphärische, und die der sphärischen auf ebene entwickelt. Es musste dieser Abschnitt dem vierten um deswillen vorangestellt werden, weil die Auflösung der Aufgabe des letzteren auf die im dritten Abschnitt abgeleiteten Sätze beruht.

Nicht nur die Hauptaufgaben, sondern auch die damit in Verbindung stehenden Nebenaufgaben sind berücksichtigt, und fast allen Beispiele hinzugefügt worden. In Bezug auf diese Beispiele führe ich an, dass Herr Dr. Auwers die Güte gehabt hat, die Berechnung derselben mit auszuführen.

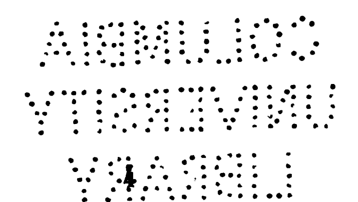
Erster Abschnitt.

1.

Eine der in der praktischen Geodäsie häufig anwendbaren Aufgaben ist die: aus der gegebenen Lage des Anfangspunkts einer geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid und der Länge derselben die Lage

1*





des Endpunkts zu finden. Diese Aufgabe ist in neuerer Zeit von deutschen Astronomen und Mathematikern mehrfach behandelt worden. Gauss hat in seiner zweiten Abhandlung über die Geodäsie (Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie, Göttingen, 1847) zwei verschiedene Auflösungen derselben gegeben, und Jacobi hat kurz nach dem Erscheinen dieser Abhandlung seinerseits eine kurze Auflösung gegeben, zu welcher ich auf seinen Wunsch ein Beispiel gerechnet habe. Die Jacobi'sche Auflösung ist erst nach seinem Tode von Luther (A. N. No. 974) bekannt gemacht worden, und es ist diesem Astronomen auch gelungen aus Jacobi's nachgelassenen Papieren seine Ableitung aufzufinden, die er gleichfalls (A. N. No. 1006 u. 1007) veröffentlicht hat.

Die genannten Auflösungen, sowohl die von Gauss wie die von Jacobi sind nicht allgemein, sondern erstrecken sich nur auf die Fälle, in welchen die gegebene geodätische Linie nicht grösser ist, als dass man sie, gleichwie die Excentricität der Erdmeridiane, als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachten kann. Für die bisher ausgeführten Gradmessungen mochte man wohl mit dieser Beschränkung ausreichen können, allein für die beiden grossen, jetzt im Werke begriffenen Unternehmungen, für die mitteleuropäische Gradmessung und die Längengradmessung zwischen Orsk in Russland und Valentia in Irland reicht man mit der genannten beschränkenden Annahme in Betreff der Länge der geodätischen Linie nicht aus. Bessel hat (A. N. No. 86) von derselben Aufgabe eine Auflösung gegeben, in welcher die genannte Beschränkung nicht enthalten ist, allein ich habe demungeachtet nicht unterlassen wollen meiner Seits auch eine selbstständige Bearbeitung derselben vorzunehmen, da mir vorkam als möchte diese Auflösung noch etwas vereinfacht werden können.

Gauss und Bessel brauchen zur Anwendung ihrer Auflösungen mehr oder minder zusammengesetzte Tafeln, die ihren Abhandlungen auch beigegeben sind, während die Auflösung, die ich hier geben werde, gar keine Hülfstafeln erfordert, gleichwie auch bei der Jacobi'schen der Fall ist; man reicht mit einigen Constanten aus, die Functionen der Excentricität der Erdmeridiane sind, welche selbstverständlich als gegeben betrachtet werden muss, und stets einen bestimmten, nie einen unbestimmten, Einfluss auf das numerische Resultat in jedem speciellen Falle äussert.

Die Jacobi'sche Ableitung seiner Auflösung ist durch seine Theorie

der elliptischen Functionen mit vieler Eleganz durchgeführt, aber so zusammengesetzt, dass es Mühe kostet von seinen Entwickelungen sich eine vollständige und klare Einsicht zu verschaffen, und es daher wünschenswerth schien, eine einfachere Ableitung zu versuchen. Die hier gegebene Entwickelung geht von denselben Legendre'schen Formeln aus, die Jacobi zu Grunde gelegt hat, und es wird daraus ohne Zuziehung der Theorie der elliptischen Functionen auf einfache Weise die unbeschränkte Auflösung erhalten. Nachdem ich in diese, als besonderen Fall, die Beschränkung eingeführt hatte, dass die geodätische Linie so kurz sei, dass man sie als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachten könne, kam ich auf eine Auflösung die nahe mit der Jacobi'schen übereinstimmt, sich aber von dieser wesentlich dadurch unterscheidet, dass sie Eine Hülfsgrösse weniger erfordert, und einige kleine Glieder enthält, die zur Genauigkeit des Resultats beitragen, aber bei Jacobi nicht vorhanden sind. Es war hiefür aus der Theorie der elliptischen Functionen nur die Anwendung eines einzigen Satzes erforderlich, nemlich die Relation zwischen dem Modul einer elliptischen Function und der von Jacobi mit q bezeichneten Grösse, durch deren Einführung er so sehr stark convergirende Reihen erhalten hat. Diese Relation tritt hier auch ohne Bezug auf ihre Bedeutung in der Theorie der elliptischen Functionen ein, und erscheint nur als eine Substitution, durch welche bewirkt wird, dass in den Coefficienten mehrere Glieder der höheren Ordnungen verschwinden, und die Reihen überhaupt eine weit grössere Convergenz bekommen. Ich habe auch aus diesem Grunde, so wie um Multiplicationen und Divisionen mit denselben numerischen Coefficienten zu vermeiden, nicht q selbst, sondern statt dessen $4q$ unter der Bezeichnung μ eingeführt.

Die Legendre'schen Formeln, von welchen ich bei den Entwickelungen ausgehe, hätte ich unmittelbar aus seinen Abhandlungen, namentlich aus seinen »Exercices etc.« entnehmen können, allein ich habe vorgezogen eine Ableitung derselben voranzustellen, die von dem Grundsatz ausgeht, dass man die Gleichung irgend einer beliebigen Oberfläche durch zwei von einander unabhängige Veränderliche, statt der drei von einander abhängigen Coordinaten darstellen kann. Dieser schon längst bekannte Satz ist bekanntlich von Gauss am Meisten angewandt und ausgebildet worden.

2.

Die Gleichung irgend einer Oberfläche sei allgemein

$$f(x, y, z) = 0$$

wo unter x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten irgend eines Punkts derselben verstanden werden. Da in Folge dieser Gleichung immer zwei Coordinaten von einander unabhängig sind, so kann man alle drei als Functionen von irgend zwei anderen, von einander unabhängigen Veränderlichen betrachten und darstellen, so dass

$$x = \varphi(p, q)\,, \quad y = \psi(p, q)\,, \quad z = \chi(p, q)$$

werden, wenn p und q die neuen Veränderlichen, und φ, ψ, χ nicht minder wie f Functionszeichen sind. Da die eben aufgestellten Functionen keiner anderen Bedingung unterliegen, als dass sie, statt x, y, z in die Gleichung der Oberfläche substituirt, diese identisch Null machen müssen, so können die Veränderlichen p und q auf mannigfache Weise angenommen, und bestimmt werden. Durch die Differentiation soll nun aus den vorstehenden drei Gleichungen hervorgegangen sein

$$dx = \eta\, dp + \eta' dq$$
$$dy = \theta\, dp + \theta' dq$$
$$dz = \mu\, dp + \mu' dq$$

wo die sechs Coefficienten η, θ, μ, η', θ', μ' als Functionen von p und q betrachtet werden können.

3.

Das Differential irgend eines Bogens hat bekanntlich, wenn man es mit ds bezeichnet, zum Ausdruck

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Substituirt man hierin die eben aufgestellten Ausdrücke für dx, dy, dz, und setzt zur Abkürzung

$$E = \eta^2 + \theta^2 + \mu^2$$
$$F = \eta\eta' + \theta\theta' + \mu\mu'$$
$$G = \eta'^2 + \theta'^2 + \mu'^2$$

so ergiebt sich

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

welcher Ausdruck das Differential irgend einer beliebigen, auf der ge-

gebenen Oberfläche gezogenen, willkührlichen Linie durch die Differentiale der Unabhängigen p und q giebt.

Man kann diesen Ausdruck vereinfachen, ohne ihm die Allgemeinheit zu rauben. Man findet auf bekannte Weise, dass das Trinom

$$E^2dp^2 + 2EFdp\,dq + EG\,dq^2$$

sich in die beiden imaginären Factoren

$$E\,dp + Fdq \pm i\,dq\sqrt{EG - F^2}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, auflösen lässt. Setzt man daher

$$\left.\begin{aligned} dh &= \sqrt{E}\,.\,dp + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dq \\ m &= \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so erhält man

$$ds^2 = dh^2 + m^2dq^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Man leistet dieser Gleichung durch die folgenden Gnüge

$$\begin{aligned} dh &= ds\cos\alpha \\ m\,dq &= ds\sin\alpha \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

woraus sich zu erkennen giebt, dass α der Winkel ist, den das Element ds der Linie s mit dem Element dh der Linie h auf der gegebenen Oberfläche macht. Die Elemente der Linien h und $\int m\,dq$ schneiden sich also unter rechten Winkeln, und ds ist die Hypotenuse eines elementaren rechtwinklichen Dreiecks, in welchem die Catheten dh und mdq sind. Der sich aus (1) ergebende Werth von ds hingegen kann als dritte Seite eines schiefwinklichen Dreiecks construirt werden, dessen beiden anderen Seiten $\sqrt{E}\,.\,dp$ und $\sqrt{G}\,.\,dq$ sind. Nennt man den von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel ω, so wird

$$\cos\omega = -\frac{F}{\sqrt{EG}}$$

denn hiemit erhält man der ebenen Trigonometrie gemäss

$$ds^2 = (\sqrt{E}.dp)^2 - 2(\sqrt{E}.dp)(\sqrt{G}.dq)\cos\omega + (\sqrt{G}.dq)^2$$

Die Linearelemente $\sqrt{E}\,.\,dp$ und $\sqrt{G}\,.\,dq$ schneiden sich also nur dann unter einem rechten Winkel, wenn die Coefficienten η, θ, μ, η', θ', μ' so beschaffen sind, dass daraus $F = 0$ folgt.

4.

Will man nun auf der gegebenen Oberfläche irgend eine der Linien $\int\sqrt{E}.dp$ oder h oder $\int\sqrt{G}.dq$ oder $\int m\,dq$ bestimmen, so kann dieses ohne Weiteres, und nur mit dem Vorbehalt der Ausführung der Integrationen geschehen, da für jede derselben das Differential der bezüglichen anderen gleich Null ist. Will man hingegen eine Linie bestimmen, die von den eben genannten verschieden ist, und einem gegebenen Gesetze folgen soll, so muss man entweder p und q oder bez. h und q in Function einer dritten Veränderlichen darstellen, oder die eine derselben bez. als Function der anderen ansehen.

5.

Um die kürzeste Linie zwischen irgend zwei Punkten auf der gegebenen Oberfläche zu bestimmen werde ich mich der Gleichung (3) bedienen, und h als Function von q betrachten. Es muss nun unter dieser Voraussetzung die Variation des Ausdrucks

$$s = \int\sqrt{dh^2 + m^2dq^2}$$

Null werden, und da

$$\delta s = \int\frac{dh\,d\delta h + m\left(\frac{dm}{dh}\right)dq^2\,\delta h}{ds}$$

$$= \frac{dh\,\delta h}{ds} + \int\delta h\left\{\frac{m\left(\frac{dm}{dh}\right)dq^2}{ds} - d.\frac{dh}{ds}\right\}$$

ist, so drückt die Gleichung

$$m\left(\frac{dm}{dh}\right)dq^2 = ds\,d.\frac{dh}{ds}$$

die Bedingung aus, dass s die kürzeste Linie zwischen irgend zwei Punkten auf der gegebenen Oberfläche ist. Diese Gleichung kann vereinfacht werden. Die erste (4) giebt

$$d.\frac{dh}{ds} = d.\cos\alpha = -\sin\alpha\,d\alpha$$

und durch die Substitution dieser und die Zuziehung der zweiten (4) ergiebt sich

$$(5)\quad\ldots\ldots\quad\left(\frac{dm}{dh}\right)dq = -d\alpha$$

als Bedingungsgleichung für die gesuchte kürzeste Linie. Ich bemerke

zum Ueberfluss hier, dass $\left(\frac{dm}{dh}\right)$ der partielle Differentialquotient von m in Bezug auf h ist. Die Relation zwischen α, dh, dq, die als Hülfsgleichung hier mit zugezogen werden muss, ist

$$\operatorname{tg} \alpha = m \frac{dq}{dh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und durch Hülfe dieser nebst deren Differential könnte man α und $d\alpha$ aus der (5) eliminiren, wodurch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen h und q entstehen würde. Für den hier zu erreichenden Zweck ist es jedoch einfacher die vorstehenden Gleichungen unverändert anzuwenden.

6.

Wenden wir nun die im Vorhergehenden abgeleiteten allgemeinen Gleichungen dazu an, um auf der als abgeplattetes Revolutionsellipsoid betrachteten Erdoberfläche die kürzeste Linie zwischen irgend zwei Punkten zu bestimmen. Dem allgemeinen Sprachgebrauch zufolge, werde ich mich für diese Linie des Ausdrucks »geodätische Linie« bedienen, welcher also hier mit »kürzester Linie« als synonym zu betrachten ist.

Legen wir die Achsen der x und y in den Aequator, in zwei beliebige, sich rechtwinklich schneidende Meridiane, und die der z in die Umdrehungsachse; bezeichnen wir ferner die Halbachsen des Ellipsoids mit a und b, unter der Voraussetzung dass $a > b$ sei, dann ist die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

und dieser Gleichung wird durch die Ausdrücke

$$x = a \cos \beta \cos l$$
$$y = a \cos \beta \sin l$$
$$z = b \sin \beta$$

Gnüge geleistet, wo β die sogenannte reducirte Breite irgend eines Punkts, und l dessen geographische Länge, von irgend einem beliebigen Meridian an gezählt, bezeichnen. Differentiirt man diese Gleichungen, und identificirt β mit p und l mit q, so wird zufolge des Vorhergehenden

$$\eta = -a \sin \beta \cos l \; ; \quad \eta' = -a \cos \beta \sin l$$
$$\theta = -a \sin \beta \sin l \; ; \quad \theta' = a \cos \beta \cos l$$
$$\mu = b \cos \beta \; ; \quad \mu' = 0$$

also

$$E = a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta$$
$$F = 0$$
$$G = a^2 \cos^2\beta$$

7

Es soll zuerst zu mehrerer Deutlichkeit das System von Linien, welches in der allgemeinen Ableitung mit h bezeichnet wurde, für sich betrachtet werden. Man erhält dieses wenn man in der Gleichung (3) $dq = 0$ macht, und es wird also hierauf $s = h$. Macht man nun in der Bedingungsgleichung (5) auch $dq = 0$, so wird $d\alpha = 0$, folglich $\alpha =$ const.; die Gleichung (6) giebt ferner $\alpha = 0$. Die Bedingungsgleichung der kürzesten Linie ist also von selbst erfüllt, und alle Linien h sind kürzeste Linien. Für die Erdoberfläche giebt der vor. Art. in Verbindung mit der ersten (2)

$$(7) \quad . \quad . \quad . \qquad dh = -d\beta\sqrt{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}$$

wo ich das Minuszeichen gewählt habe, weil es angemessen ist die geodätischen Linien h im Pole anfangen zu lassen. Hiemit wird also

$$h = -\int d\beta\sqrt{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta} + \text{const.}$$

und dieser Ausdruck zeigt, dass h ein Bogen irgend eines Meridians ist; die Meridiane sind also auf der Oberfläche der Erde geodätische Linien.

8.

Gehen wir zum allgemeinen Fall auf der Erdoberfläche über, so erhalten wir erst durch die zweite (2) in Verbindung mit den Ausdrücken des vorvor. Art.

$$m = a \cos\beta$$

woraus mit Zuziehung der (7)

$$\left(\frac{dm}{dh}\right) = \left(\frac{dm}{d\beta}\right)\left(\frac{d\beta}{dh}\right) = \frac{a \sin\beta}{\sqrt{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}}$$

folgt. Die Gleichungen (5) und (6) werden nun

$$\frac{a \sin\beta dl}{\sqrt{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}} = -d\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a \cos\beta}{\sqrt{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}}\,\frac{dl}{d\beta}$$

und eliminirt man hieraus dl, so erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta d\beta = d\alpha$$

deren Integral

$$\cos \beta \sin \alpha = \text{const.}$$

ist. Es ist an sich klar, dass jede geodätische Linie hinreichend verlängert wenigstens Ein Mal einen Meridian rechtwinklich schneiden muss, und nennt man die reducirte Breite des Punkts derselben, wo dieses statt findet, β_0, so wird das vorstehende Integral

$$\cos \beta \sin \alpha = \cos \beta_0 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Diese Gleichung ist die erste Grundgleichung der geodätischen Linie. Zufolge des Art. 3 ist α der Winkel den die allgemeine kürzeste Linie mit den Linien h macht, und zufolge des Art. 7 sind die Linien h auf dem Revolutionsellipsoid Meridianbögen, oder wenn man das dort gefundene Integral hinreichend ausdehnt, die ganzen Meridiane, der Winkel α ist folglich das Azimuth der geodätischen Linie in irgend einem unbestimmten Punkt derselben.

Die zweite Gleichung (4) wird jetzt

$$a \cos \beta dl = \sin \alpha ds$$

und eliminirt man hieraus α vermittelst der (8), so ergiebt sich

$$a \cos^2 \beta dl = \cos \beta_0 ds \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

welches die zweite Grundgleichung der geodätischen Linie ist.

Die Elimination von dh aus der ersten (4) durch Hülfe der (7) giebt

$$ds \cos \alpha = - d\beta \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}$$

und schafft man hieraus α durch Hülfe der (8) fort, so bekommt man

$$ds = - d\beta \cos \beta \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}}{\sqrt{\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \beta}} \quad \ldots \quad (10)$$

welches die dritte und letzte Grundgleichung der geodätischen Linie ist. Das Integral dieser Gleichung giebt die Länge der geodätischen Linie, die durch einen endlichen Ausdruck nicht erhalten werden kann, weshalb die Rectification derselben unmöglich ist. Eliminirt man ds aus (9) durch Zuziehung der (10), so bekommt man

$$dl = - d\beta \frac{\cos \beta_0}{\cos \beta} \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}}{a \sqrt{\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \beta}}$$

deren Integral die Gleichung der geodätischen Linie selbst ist.

9.

Der Ausdruck (10) kann vereinfacht werden. Führt man erst die Excentricität e der Erdmeridiane durch die Gleichung

$$a^2 - b^2 = a^2 e^2$$

ein, so wird er

$$ds = - ad\beta \cos\beta \frac{\sqrt{1-e^2+e^2\sin^2\beta}}{\sqrt{\sin^2\beta_0 - \sin^2\beta}}$$

und führt man hierauf den Bogen φ statt β durch die folgende Relation ein,

(11) . . . . . $\sin\beta = \sin\beta_0 \cos\varphi$

so ergiebt sich

$$ds = ad\varphi \sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi}$$

Setzt man hierauf

(12) . . $\operatorname{tg}\beta_0 = \sqrt{1-e^2} \, . \operatorname{tg} B_0 \, , \; e \sin B_0 = k$

wo also B_0 die Polhöhe des Punkts bezeichnet, in welchem die geodätische Linie den Meridian rechtwinklich schneidet, und erwägt dass hieraus

$$\sin^2\beta_0 = \frac{(1-e^2)\sin^2 B_0}{1 - e^2 \sin^2 B_0}$$

folgt, so wird schliesslich

(13) . . . . $ds = a \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$

Diese Gleichung zeigt, dass die Länge der geodätischen Linie durch ein elliptisches Integral zweiter Gattung bestimmt wird.

Eliminirt man vermittelst der (13) ds aus der (9), so bekommt man für die Differentialgleichung der geodätischen Linie selbst

(14) . . . $dl = \frac{\sin\beta_0 \cos\beta_0}{\sin B_0} d\varphi \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}{1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi}$

Da der Nenner dieses Ausdrucks

$$1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi = \cos^2\beta_0 (1 + \operatorname{tg}^2\beta_0 \sin^2\varphi)$$

ist, so erkennt man, dass die Gleichung der geodätischen Linie ein elliptisches Integral dritter Gattung ist.

10.

Gehen wir nun zu der ersten Hauptaufgabe über: »Aus der gege- »benen Länge einer geodätischen Linie und der Lage ihres Anfangs- »punkts auf der Erdoberfläche die Lage ihres Endpunkts zu finden.«

Seien

s die Länge der geodätischen Linie
B' die Polhöhe
β' die reducirte Breite
α' das Azimuth
} des Anfangspunkts

von s dessen geogr. Länge gleich Null gesetzt wird, ferner

B'' die Polhöhe
β'' die reducirte Breite
λ die geogr. Länge
$180^0 + \alpha''$ das Azimuth
} des Endpunkts von s.

Da man die geographischen Längen von einem beliebigen Meridian an zählen kann, so ist durch B' oder β' und α' die Lage des Anfangspunkts von s vollständig gegeben, und die Bögen s, B', α' sind daher die gegebenen Stücke unserer Aufgabe; aus demselben Grunde sind die Bögen B'', λ, α'' die zu bestimmenden Grössen. Die Azimuthe sollen hier immer vom Südpunkt des Horizonts gezählt werden, und von da an in derselben Richtung, in welcher man die Längen wachsend annimmt, wachsen. Durch diese Bestimmung werden alle Längen positiv, und zwischen den Grenzen 0 und 180^0 eingeschlossen; dieselben Grenzen sind alsdann auch die von α' und α''.

Seien nun φ' und φ'' die Werthe des Bogens φ für den Anfangs- und den Endpunkt von s, dann geben die Gleichungen (13) und (14)

$$s = a \frac{\sin \beta_0}{\sin B_0} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\lambda = \frac{\sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sin B_0} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \varphi}$$

Da die Lage des Anfangspunkts von s gegeben ist, so sind durch die Gleichungen (8) und (11) auch β_0 und φ' gegeben, und in der ersten der vorstehenden Gleichungen ist φ'' die einzige Unbekannte, die daher durch diese Gleichung zu bestimmen ist.. Hierauf wird die rechte Seite der zweiten Gleichung völlig bekannt, und es kann durch dieselbe der Längenunterschied λ des Anfangs- und des Endpunkts von s bestimmt werden.

11.

Aus den Gleichungen (8) und (11) geht hervor, dass überhaupt $90^0 - \beta_0$, $90^0 - \beta$, α, φ vier Stücke eines rechtwinklichen, sphärischen Dreiecks sind, in welchem $90^0 - \beta$ die Hypotenuse, $90^0 - \beta_0$ und φ die Catheten, und α der der Seite $90^0 - \beta_0$ gegenüber liegende Winkel sind. Um dieses Dreieck sogleich vollständig betrachten zu können soll auch der Winkel am Pole, oder der der Seite φ gegenüber liegende Winkel eingeführt, und allgemein mit Ω bezeichnet werden. Bezieht man dieses Dreieck auf den Anfangspunkt von s, und versieht wie oben die dahin gehörigen Bögen mit einem Strich, so ergeben sich zur Bestimmung von φ', Ω', β_0 die Gleichungen

$$(15) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sin\beta_0 \sin\varphi' = \cos\beta' \cos\alpha' \\ \sin\beta_0 \cos\varphi' = \sin\beta' \\ \sin\beta_0 \sin\Omega' = \cos\alpha' \\ \sin\beta_0 \cos\Omega' = \sin\beta' \sin\alpha' \\ \cos\beta_0 = \cos\beta' \sin\alpha' \end{cases}$$

Ist hierauf auf die im vor. Art. angedeutete Art φ'' bestimmt, so giebt dasselbe Dreieck durch seine Anwendung auf den Endpunkt von s,

$$(16) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos\beta'' \sin\alpha'' = \cos\beta_0 \\ \cos\beta'' \cos\alpha'' = \sin\beta_0 \sin\varphi'' \\ \cos\beta'' \sin\Omega'' = \sin\varphi'' \\ \cos\beta'' \cos\Omega'' = \cos\beta_0 \cos\varphi'' \\ \sin\beta'' = \sin\beta_0 \cos\varphi'' \end{cases}$$

Durch die Anwendung dieser beiden Systeme von Gleichungen kann man immer die Unbekannten mit der ganzen Sicherheit, die die Umstände der Aufgabe gestatten, bestimmen, und ist über den Quadranten, in welchem die Bögen zu nehmen sind, nie in Ungewissheit.

Von B' zu β', und von β'' zu B'' geht man durch die allgemeine Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{1 - e^2} \,.\, \operatorname{tg} B$$

oder durch die Reihenentwickelungen derselben, die weiter unten angeführt werden sollen, über.

12.

Wenden wir uns nun zur Bestimmung von φ'', so ist die Gleichung (13) oder

$$\frac{\sin B_0}{a \sin \beta_0} ds = d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

von φ' bis φ'' zu integriren. Zu diesem Zweck ergiebt sich zuerst

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2\varphi - \frac{1}{8} k^4 \sin^4\varphi - \frac{1}{16} k^6 \sin^6\varphi - \ldots$$

in welcher bei dem statt findenden Werthe von e für den Erdkörper die angesetzten Glieder völlig ausreichend sind. Durch die bekannten, allgemeinen Relationen

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$

$$\sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi$$

$$\sin^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2\varphi + \frac{3}{16} \cos 4\varphi - \frac{1}{32} \cos 6\varphi$$

erhält man hieraus

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \frac{5}{256}k^6\right) + \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16}k^4 + \frac{15}{512}k^6\right) \cos 2\varphi$$
$$- \left(\frac{1}{64}k^4 + \frac{3}{256}k^6\right) \cos 4\varphi + \frac{1}{512}k^6 \cos 6\varphi \mp \ldots$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $d\varphi$, und integrirt innerhalb der angegebenen Grenzen, so erhält man

$$\frac{\sin B_0}{a \sin \beta_0} s = \left(1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 - \frac{5}{256} k^6\right) (\varphi'' - \varphi')$$
$$+ \left(\frac{1}{8} k^2 + \frac{1}{32} k^4 + \frac{15}{1024} k^6\right) (\sin 2\varphi'' - \sin 2\varphi')$$
$$- \left(\frac{1}{256} k^4 + \frac{3}{1024} k^6\right) (\sin 4\varphi'' - \sin 4\varphi')$$
$$+ \frac{1}{3072} k^6 (\sin 6\varphi'' - \sin 6\varphi')$$

Aber aus den Gleichungen (12) folgt leicht, dass

$$\frac{\sin B_0}{\sin \beta_0} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-e^2}}$$

ist, substituirt man diesen Ausdruck und zieht die Glieder möglichst zusammen, so wird

$$\frac{s}{a\sqrt{1-e^2}} = A(\varphi'' - \varphi') + B \cos(\varphi'' + \varphi') \sin(\varphi'' - \varphi') \qquad (17)$$
$$- C \cos 2(\varphi'' + \varphi') \sin 2(\varphi'' - \varphi')$$
$$+ D \cos 3(\varphi'' + \varphi') \sin 3(\varphi'' - \varphi')$$

wo

$$A = 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{13}{64}k^4 + \frac{45}{256}k^6$$
$$B = \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{16}k^4 + \frac{79}{512}k^6$$
$$C = \frac{1}{128}k^4 + \frac{5}{512}k^6$$
$$D = \frac{1}{1536}k^6$$

ist. In diesem Ausdruck muss s jedenfalls durch dieselbe Maasseinheit ausgedrückt werden wie der Halbmesser des Aequators a, in Bezug auf die Bögen φ'' und φ' ist es am Zweckmässigsten dieselben auf gewöhnliche Art in Secunden u. s. w. auszudrücken, und zur Erlangung der Homogeneität in der vorstehenden Gleichung müssen daher sowohl die linke Seite derselben, wie die Coefficienten B, C, D mit dem in Secunden ausgedrückten Kreisbogen multiplicirt werden, der dem Kreishalbmesser gleich ist.

13.

Es ist nun φ'' durch die Gleichung (17) zu bestimmen, und hiebei soll zuerst die Länge s der geodätischen Linie keiner Beschränkung unterworfen werden. Es ergiebt sich hiemit

$$\begin{aligned}\varphi'' = \varphi' + \frac{1}{A\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{s}{a}r &- B_1 \cos(\varphi''+\varphi') \sin(\varphi''-\varphi') \\ &+ C_1 \cos 2(\varphi''+\varphi') \sin 2(\varphi''-\varphi') \\ &- D_1 \cos 3(\varphi''+\varphi') \sin 3(\varphi''-\varphi')\end{aligned}$$

wo

$$B_1 = r\frac{B}{A}, \quad C_1 = r\frac{C}{A}, \quad D_1 = r\frac{D}{A}$$

und r die Anzahl von Secunden bedeutet, die dem Kreishalbmesser gleich, also $r = 206264'',8\ldots$ ist. Die vorstehende Gleichung zeigt, dass die Summe der beiden ersten Glieder rechter Hand einen bis auf Grössen zweiter Ordnung in Bezug auf e genäherten Werth von φ'' bildet. Setzt man daher

$$\sigma = r\frac{s}{a}, \quad S = \frac{\sigma}{A\sqrt{1-e^2}}$$
$$\varphi'' = \varphi' + S - x$$

wo folglich σ die in Bogentheilen des Aequators ausgedrückte Länge der geodätischen Linie bezeichnet, dann ist x eine kleine Grösse zweiter Ordnung, und durch die Substitution erhält man

$$x = B_1 \cos(2\varphi'+S-x)\sin(S-x) - C_1\cos(4\varphi'+2(S-x))\sin 2(S-x) + D_1\cos(6\varphi'+3(S-x))\sin 3(S-x)$$

Diese Gleichung giebt bei den grössten Werthen von S, die vorkommen können, eine sehr schnell convergirende indirecte Auflösung, wenn man die Näherungen damit anfängt, dass man

$$x = B_1\cos(2\varphi'+S)\sin S$$

in die rechte Seite substituirt.

14.

Es wird, ehe wir weiter gehen, nicht undienlich sein, diese starke Annäherung durch ein Beispiel nachzuweisen. Der Maximalwerth von k ist e, und diesen will ich im Beispiel annehmen, da es klar ist, dass für kleinere Werthe von k die Annäherung noch grösser werden muss. Es ist hiemit zugleich $B_0 = \beta_0 = 90^0$ angenommen, und folglich ist die geodätische Linie, die hier beispielsweise betrachtet werden soll, ein Theil irgend eines Meridians des Erdellipsoids. Setzt man nach Bessel

$$\log e = 8{,}9122052$$

so ergeben sich unter der Voraussetzung dass $k=e$ ist, die folgenden numerischen Werthe der Coefficienten

$$B_1 = 345'',3250$$
$$C_1 = 0.0722$$
$$D_1 = 0.00004$$

woraus hervorgeht, dass selbst wenn man die Genauigkeit bis auf Zehntausendtheile der Secunde treiben will, das dritte Glied des Ausdrucks für x immer völlig unmerklich ist. Dagegen sind die in B_1 und C_1 enthaltenen Glieder sechster Ordnung nicht ohne Belang. Setzt man ausserdem

$$\varphi' = 10^0 \;,\quad S = 40^0$$

so giebt die Näherungsformel für x zuerst $x = 1'51'',0$, und substituirt man diesen in die vollständige Gleichung, so bekommt man

$$x = +\,1'51'',0175 + 0'',0355 = +\,1'51'',0530$$

Hiemit sind die Annäherungen schon vollendet, da eine neue Substitution von x denselben Werth wieder geben würde.

Es wird daher schliesslich

$$\varphi'' = 49^0\,58'\,8'',9470$$

Man sieht hieraus wie schnell man durch den obigen Ausdruck von x zum genauen Werthe dieses Bogens gelangt.

15.

Der im vorvor. Art. erhaltene Ausdruck für x kann aber auch in einen directen umgewandelt werden, und das Resultat wird sehr einfach, wenn man die Glieder sechster Ordnung weglässt. Den Ausdruck für x ändert man leicht in den folgenden ab,

$$\begin{aligned} x = & - \tfrac{1}{2} B_1 \sin 2\varphi' + \tfrac{1}{2} C_1 \sin 4\varphi' \\ & + \tfrac{1}{2} B_1 \sin 2(\varphi'+S) \cos 2x - \tfrac{1}{2} C_1 \sin 4(\varphi'+S) \cos 4x \\ & - \tfrac{1}{2} B_1 \cos 2(\varphi'+S) \sin 2x + \tfrac{1}{2} C_1 \cos 4(\varphi'+S) \sin 4x \end{aligned}$$

Substituirt man hierin für die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen von x ihre Reihenentwickelungen, so ergiebt sich bis auf Grössen sechster Ordnung

$$\begin{aligned} x = & B_1 \cos(2\varphi'+S) \sin S - C_1 \cos(4\varphi'+2S) \sin 2S \\ & - x B_1 \cos 2(\varphi'+S) \end{aligned}$$

und nach der Elimination von x auf der rechten Seite, mit demselben Grade der Genauigkeit

$$\begin{aligned} x = & B_1 \cos(2\varphi'+S) \sin S - C_1 \cos(4\varphi'+2S) \sin 2S \\ & - \tfrac{1}{r} B_1^2 \cos 2(\varphi'+S) \cos(2\varphi'+S) \sin S \end{aligned} \tag{18}$$

Behandelt man das Beispiel des vor. Art. nach diesem Ausdruck, so findet man

$$x = + 1'50'',9853 + 0''.0355 + 0''.0323 = + 1'51'',0531$$

mit dem obigen Werthe bis auf 0'',0001 übereinstimmend.

16.

In vielen zur Anwendung kommenden Fällen ist der Werth von σ so klein, dass er für eine kleine Grösse erster Ordnung gehalten werden kann, und es ist daher von Interesse diesen Fall besonders zu behandeln. Man kann hiebei von der Gleichung (18) ausgehen, die nun, da S eine kleine Grösse erster Ordnung wird, bis auf Grössen siebenter Ordnung richtig wird. Da man jetzt auch die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen von S in ihre Reihen auflösen darf, so wird soweit es zur

Erlangung des Resultats bis auf Grössen siebenter Ordnung erforderlich ist,

$$\cos(2\varphi'+S)\sin S = S\cos 2\varphi' - S^2\sin 2\varphi' - \tfrac{2}{3}S^3\cos 2\varphi' + \tfrac{1}{3}S^4\sin 2\varphi'$$

$$\cos(4\varphi'+2S)\sin 2S = 2S\cos 4\varphi' - 4S^2\sin 4\varphi'$$

$$\cos(2\varphi'+2S)\cos(2\varphi'+S)\sin S = \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}S\cos 4\varphi' - \tfrac{3}{2}S^2\sin 4\varphi'$$

und für die Coefficienten bekommt man

$$B_1 = r\left(\tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{8}k^4\right), \quad C_1 = r\tfrac{1}{128}k^4, \quad \tfrac{1}{r}B_1^2 = r\tfrac{1}{16}k^4$$

Substituirt man diese Ausdrücke, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} x = S & \left\{-\tfrac{1}{32}k^4 + \left(\tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{8}k^4\right)\cos 2\varphi' - \tfrac{3}{64}k^4\cos 4\varphi'\right\} \\ & - \rho S^2\left\{\left(\tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{8}k^4\right)\sin 2\varphi' - \tfrac{1}{8}k^4\sin 4\varphi'\right\} \\ & - \tfrac{1}{6}\rho^2 S^3 k^2\cos 2\varphi' + \tfrac{1}{12}\rho^3 S^4 k^2\sin 2\varphi' \end{aligned}$$

wo $\rho = \frac{1}{r}$ ist. Es ist angemessen hier statt S die Grösse

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{1-e^2}}$$

einzuführen, und da nun zufolge des Art. 13

$$S = \frac{\sigma'}{A}$$

oder nach der Reihenentwickelung

$$S = \sigma'\left(1 - \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{9}{64}k^4\right)$$

wird, so kann x leicht in Function von σ' dargestellt werden. Setzt man $\varphi'' - \varphi' = \chi$, woraus $\chi = S - x$ folgt, dann giebt die Substitution der vorstehenden Ausdrücke von x und S

$$\begin{aligned} \chi = \sigma' & \left\{\left(1 - \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{7}{64}k^4\right) - \left(\tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{16}k^4\right)\cos 2\varphi' + \tfrac{3}{64}k^4\cos 4\varphi'\right\} \\ & + \rho\sigma'^2\left\{\tfrac{1}{4}k^2\sin 2\varphi' - \tfrac{1}{8}k^4\sin 4\varphi'\right\} \\ & + \rho^2\sigma'^3\tfrac{1}{6}k^2\cos 2\varphi' - \rho^3\sigma'^4\tfrac{1}{12}k^2\sin 2\varphi' \end{aligned}$$

bis auf Grössen siebenter Ordnung vollständig.

17.

Den eben gefundenen Ausdruck kann man durch die folgenden Substitutionen vereinfachen. Löst man zuerst die erste Zeile desselben ab, indem man

$$\psi = \sigma' \left\{\left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{7}{64}k^4\right) - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16}k^4\right)\cos 2\varphi' + \frac{3}{64}k^4 \cos 4\varphi'\right\}$$

setzt, und führt darauf in dem übrigen Theil ψ statt σ' ein, so bekommt man

$$\chi = \psi + \varrho\psi^2 \left\{\left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4\right)\sin 2\varphi' - \frac{1}{16}k^4 \sin 4\varphi'\right\}$$
$$+ \varrho^2\psi^3 \frac{1}{6}k^2 \cos 2\varphi' - \varrho^3\psi^4 \frac{1}{12}k^2 \sin 2\varphi'$$

sucht man ferner statt der Ausdrücke für ψ und χ selbst, die ihrer Logarithmen, so erhält man

$$\log.\text{nat}\,\psi = \log.\text{nat}\,\sigma' - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{5}{32}k^4\right) - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4\right)\cos 2\varphi'$$
$$+ \frac{1}{32}k^4 \cos 4\varphi'$$

$$\log.\text{nat}\,\chi = \log.\text{nat}\,\psi + \varrho\psi \left\{\left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4\right)\sin 2\varphi' - \frac{1}{16}k^4 \sin 4\varphi'\right\}$$
$$+ \frac{1}{6}\varrho^2\psi^2 k^2 \cos 2\varphi' - \frac{1}{12}\varrho^3\psi^3 k^2 \sin 2\varphi'$$

Sei endlich

$$(19) \quad . \quad . \quad k^2 = 4\mu - 8\mu^2 + 11\mu^3 - 12\mu^4 \pm \ldots$$

dann werden die vorstehenden Ausdrücke

$$\log.\text{nat}\,\psi = \log.\text{nat}\,\sigma' - 2\mu \cos^2\varphi' - \mu^2 \sin^2 2\varphi'$$

$$\log.\text{nat}\,\chi = \log.\text{nat}\,\psi + \varrho\psi\mu \sin 2\varphi' + \frac{2}{3}\varrho^2\psi^2\mu \cos 2\varphi'$$
$$- \varrho\psi\mu^2 \sin 4\varphi' - \frac{1}{3}\varrho^3\psi^3\mu \sin 2\varphi'$$

auch bis auf Grössen siebenter Ordnung richtig.

Die Gleichung zwischen k und μ giebt durch die Umkehrung

$$\mu = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4 + \frac{21}{256}k^6 + \frac{31}{512}k^8 + \ldots$$

aber die Gleichungen (12) geben

$$\sin^2 B_0 = \frac{\sin^2\beta_0}{1 - e^2\cos^2\beta_0}, \quad e \sin B_0 = k$$

woraus

$$k^2 = \frac{\varepsilon \sin^2\beta_0}{1 + \varepsilon \sin^2\beta_0}$$

folgt, wenn

$$\varepsilon = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

gesetzt wird. Hiemit bekommt man

$$k^2 = \varepsilon \sin^2\beta_0 - \varepsilon^2 \sin^4\beta_0 + \varepsilon^3 \sin^6\beta_0 - \varepsilon^4 \sin^8\beta_0 \pm \ldots$$
$$k^4 = \varepsilon^2 \sin^4\beta_0 - 2\varepsilon^3 \sin^6\beta_0 + 3\varepsilon^4 \sin^8\beta_0 \mp \ldots$$
$$k^6 = \varepsilon^3 \sin^6\beta_0 - 3\varepsilon^4 \sin^8\beta_0 \pm \ldots$$
$$k^8 = \varepsilon^4 \sin^6\beta_0 \mp \ldots$$

Setzt man diese in die vorstehende Gleichung zwischen μ und k, so erhält man

$$\mu = \frac{1}{4}\varepsilon \sin^2\beta_0 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^4\beta_0 + \frac{21}{256}\varepsilon^3 \sin^6\beta_0 - \frac{81}{512}\varepsilon^4 \sin^8\beta_0 \pm \ldots$$

woraus, wenn man zum Logarithmus übergeht

$$\log.\text{nat}\,\mu = \log.\text{nat}\,\frac{\varepsilon}{4}\sin^2\beta_0 - \frac{1}{2}\varepsilon \sin^2\beta_0 + \frac{13}{64}\varepsilon^2 \sin^4\beta_0 - \frac{23}{192}\varepsilon^3 \sin^6\beta_0 \pm \ldots$$

folgt. Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Jacobi'schen, so findet man dass sie im Allgemeinen damit übereinstimmen. Die hier entwickelten Endformeln sind aber aus dem Grunde, dass im Ausdruck für μ die Polhöhe B_0 eliminirt ist, einfacher wie die Jacobi'schen, indem dadurch die Berechnung von B_0 ganz wegfällt, welches bei Jacobi nicht der Fall ist. Ausserdem ist zu bemerken, dass in dem Ausdruck für log. nat χ die beiden Glieder $-\varrho\psi\mu^2 \sin 4\varphi' - \frac{1}{8}\varrho^3\psi^3\mu \sin 2\varphi'$ bei Jacobi nicht vorhanden sind, und daher sein Ausdruck für χ (von ihm φ genannt) nur bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist; die beiden genannten Glieder können indess zuweilen Merkliches geben.

18.

Für die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt der geodätischen Linie nehme ich die Gleichung (14) vor. Entwickelt man die in derselben vorkommende Wurzelgrösse, so findet man

$$dl = \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0} \cdot \frac{\cos\beta_0\, d\varphi}{1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi}\left\{1 - \frac{1}{2}k^2 \sin^2\varphi - \frac{1}{8}k^4 \sin^4\varphi - \frac{1}{16}k^6 \sin^6\varphi - \ldots\right\}$$

Es ist aber leicht zu zeigen dass

$$\frac{\sin^2\varphi}{1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\beta_0} - \frac{\operatorname{cotg}^2\beta_0}{1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi}$$
$$\frac{\sin^4\varphi}{1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\beta_0} - \frac{\operatorname{cotg}^2\beta_0}{\sin^2\beta_0} + \frac{\operatorname{cotg}^4\beta_0}{1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi}$$
$$\frac{\sin^6\varphi}{1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi} = \frac{\sin^4\varphi}{\sin^2\beta_0} - \frac{\operatorname{cotg}^2\beta_0}{\sin^2\beta_0}\sin^2\varphi + \frac{\operatorname{cotg}^4\beta_0}{\sin^2\beta_0} - \frac{\operatorname{cotg}^6\beta_0}{1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi}$$



u. s. w., deren Fortschreiten einfach und regelmässig ist. Ferner ist leicht zu bestätigen dass

$$\cos\beta_0 \int \frac{d\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0} + \text{const.}$$

ist, und aus den vorstehenden Ausdrücken folgt daher dass

$$\cos\beta_0 \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \frac{\cos\beta_0}{\sin^2\beta_0}\varphi - \text{cotg}^2\beta_0\ \text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0}$$

$$\cos\beta_0 \int \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \cos\beta_0\,\frac{1-2\,\text{cotg}^2\beta_0}{2\sin^2\beta_0}\varphi$$

$$-\cos\beta_0\,\frac{\sin 2\varphi}{4\sin^2\beta_0} + \text{cotg}^4\beta_0\ \text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0}$$

$$\cos\beta_0 \int \frac{\sin^6\varphi\, d\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \cos\beta_0\,\frac{3-4\,\text{cotg}^2\beta_0+8\,\text{cotg}^4\beta_0}{8\sin^2\beta_0}\varphi$$

$$-\cos\beta_0\,\frac{1-\text{cotg}^2\beta_0}{4\sin^2\beta_0}\sin 2\varphi + \cos\beta_0\,\frac{\sin 4\varphi}{32\sin^2\beta_0} - \text{cotg}^6\beta_0\ \text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0}$$

u. s. w., wo ich der Kürze wegen die Integrationsconstanten weggelassen habe. Substituirt man nun die vorstehenden Ausdrücke in das Integral des vorstehenden Ausdrucks für dl, und nimmt vorläufig keine Rücksicht auf die Grenzen desselben, so bekommt man für irgend einen unbestimmten Punkt der geodätischen Linie

$$\begin{aligned} l = \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0}\Big\{ & \Big(1+\tfrac{1}{2}k^2\,\text{cotg}^2\beta_0 - \tfrac{1}{8}k^4\,\text{cotg}^4\beta_0 + \tfrac{1}{16}k^6\,\text{cotg}^6\beta_0 \mp \ldots\Big)\,\text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0} \\ & - \cos\beta_0\Big[\Big(\frac{k^2}{2\sin^2\beta_0} + k^4\,\frac{1-2\,\text{cotg}^2\beta_0}{16\sin^2\beta_0} + k^6\,\frac{3-4\,\text{cotg}^2\beta_0+8\,\text{cotg}^4\beta_0}{128\sin^2\beta_0}\Big)\varphi \\ & - \Big(\frac{k^4}{32\sin^2\beta_0} + k^6\,\frac{1-\text{cotg}^2\beta_0}{64\sin^2\beta_0}\Big)\sin 2\varphi + \frac{k^6}{512\sin^2\beta_0}\sin 4\varphi\Big] \pm \ldots\Big\} \\ & + \text{const.} \end{aligned}$$

Es ist zu bemerken, dass alle unendlichen Reihen dieses Ausdrucks immer stark convergiren, da für jeden Werth von β_0 das Verhältniss $\frac{k}{\sin\beta_0}$ sehr nahe $= e$ ist.

19.

Man erkennt auf den ersten Blick, dass die Reihe womit $\text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0}$ in dem eben erhaltenen Ausdruck für l multiplicirt ist, die Entwickelung von $\sqrt{1+k^2\,\text{cotg}^2\beta_0}$ ist, und da

$$\sin B_0 = \frac{k}{e}, \quad \text{tg}\,\beta_0 = \sqrt{1-e^2}\,.\,\text{tg}\,B_0$$

ist, so wird

$$\text{tg}^2 B_0 = \frac{k^2}{e^2-k^2}, \quad \text{cotg}^2\beta_0 = \frac{e^2-k^2}{k^2(1-e^2)}$$

folglich

$$\sqrt{1+k^2 \operatorname{cotg}^2\beta_0} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin B_0}{\sin \beta_0}$$

Der Ausdruck für l geht daher über in

$$\begin{aligned} l = \operatorname{arc.\,tg} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\beta_0} \\ - \cos\beta_0 \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0} \Big\{ & \Big(\frac{k^2}{2\sin^2\beta_0} + k^4 \frac{1-2\operatorname{cotg}^2\beta_0}{16\sin^2\beta_0} + k^6 \frac{3-4\operatorname{cotg}^2\beta_0+8\operatorname{cotg}^4\beta_0}{128\sin^2\beta_0} \Big)\varphi \\ & - \Big(\frac{k^4}{32\sin^2\beta_0} + k^6 \frac{1-\operatorname{cotg}^2\beta_0}{64\sin^2\beta_0} \Big) \sin 2\varphi + \frac{k^6}{512\sin^2\beta_0} \sin 4\varphi \Big\} \\ + \text{const.} \end{aligned}$$

Wenden wir uns nun zu dem im Art. 11 betrachteten rechtwinklichen, sphärischen Dreieck, so geben die Gleichungen (15), wenn sie auf den unbestimmten Punkt der geodätischen Linie angewandt werden, welcher dem Bogen φ entspricht,

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\alpha}\,; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$\cos\beta_0 = \cos\beta\sin\alpha$$

und hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\beta_0}$$

Setzt man daher $l = \Omega - \Delta\Omega$, so bekommt man

$$\begin{aligned} \Delta\Omega = \frac{1}{2}\cos\beta_0 \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0} \Big\{ & \Big(\frac{k^2}{\sin^2\beta_0} + k^4 \frac{1-2\operatorname{cotg}^2\beta_0}{8\sin^2\beta_0} + k^6 \frac{3-4\operatorname{cotg}^2\beta_0+8\operatorname{cotg}^4\beta_0}{64\sin^2\beta_0} \Big)\varphi \\ & - \Big(\frac{k^4}{16\sin^2\beta_0} + k^6 \frac{1-\operatorname{cotg}^2\beta_0}{32\sin^2\beta_0} \Big) \sin 2\varphi + \frac{k^6}{256\sin^2\beta_0} \sin 4\varphi \Big\} \\ & + \text{const.} \end{aligned}$$

Die in diesem Ausdruck vorkommenden Functionen lassen sich durch Zuziehung der im vorvor. Art. eingeführten, mit ε bezeichneten, Grösse auf einfache Weise ausdrücken. Man bekommt strenge

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{\sin^2\beta_0} &= \varepsilon(1-k^2) \\ k^2(1-2\operatorname{cotg}^2\beta_0) &= 3k^2 - 2\varepsilon(1-k^2) \\ k^4(3-4\operatorname{cotg}^2\beta_0+8\operatorname{cotg}^4\beta_0) &= 15k^4 - 20\varepsilon k^2(1-k^2) + 8\varepsilon^2(1-k^2)^2 \\ k^4(1-\operatorname{cotg}^2\beta_0) &= 2k^4 - \varepsilon k^2(1-k^2) \\ \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0} &= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}\,.\,\sqrt{1-k^2}} \end{aligned}$$

Substituirt man diese und bleibt bei den Gliedern sechster Ordnung stehen, so bekommt man

$$\Delta\Omega = \tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\cos\beta_0\Big\{\Big(1+\tfrac{3}{8}k^2-\tfrac{1}{4}\varepsilon+\tfrac{15}{64}k^4-\tfrac{1}{16}\varepsilon k^2+\tfrac{1}{8}\varepsilon^2\Big)\varphi$$
$$-\Big(\tfrac{1}{16}k^2+\tfrac{1}{16}k^4-\tfrac{1}{32}\varepsilon k^2\Big)\sin 2\varphi+\tfrac{k^4}{256}\sin 4\varphi\Big\}$$
$$+\text{ const.}$$

die auch in die folgende umgewandelt werden kann

$$\Delta\Omega = \tfrac{1}{2}e^2\cos\beta_0\Big\{\Big(1-\tfrac{1}{8}k^2+\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{5}{64}k^4+\tfrac{1}{8}e^4\Big)\varphi$$
$$-\Big(\tfrac{1}{16}k^2+\tfrac{1}{32}k^4\Big)\sin 2\varphi+\tfrac{k^4}{256}\sin 4\varphi\Big\}+\text{ const.}$$

und bis auf Grössen achter Ordnung richtig ist. Die Grössen sechster Ordnung, welche dieser Ausdruck enthält, sind fast immer ganz unmerklich, und nur hauptsächlich das Glied $\frac{1}{8}e^4$ im Coefficienten von φ wird zuweilen ein Weniges geben können, indem in den Fällen, in welchen $\cos\beta_0$ nicht klein wird, im Gegentheil k sehr klein wird. Man kann aus diesem Grunde die Grösse $\frac{\varphi}{64}k^2e^4\cos\beta_0$ als ganz unmerklich betrachten*), fügt man aber dem Coefficienten von φ innerhalb der Klammern das Glied $-\frac{1}{32}k^2e^2$ hinzu, so lässt er sich in die beiden Factoren $1-\frac{1}{8}k^2-\frac{5}{64}k^4$ und $1+\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{8}e^4$ zerlegen, und die Berechnung desselben wird einfacher. Da ferner auch das mit $\sin 4\varphi$ multiplicirte Glied immer unmerklich ist, so wird mit stets ausreichender Genauigkeit

$$\Delta\Omega = \tfrac{1}{2}e^2\cos\beta_0\Big\{\Big(1+\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{1}{8}e^4\Big)\Big(1-\tfrac{1}{8}k^2-\tfrac{5}{64}k^4\Big)\varphi$$
$$-\Big(\tfrac{1}{16}k^2+\tfrac{1}{32}k^4\Big)\sin 2\varphi\Big\}+\text{ const.}$$

Es ist hiebei noch zu bemerken, dass in vielen Fällen $\cos\beta_0$ sehr klein wird, und wenn dieses statt findet, ist der vorstehende Ausdruck eine Ordnung genauer wie ausserdem.

20.

Schreibt man nun für den Anfangs- und den Endpunkt der geodätischen Linie nicht nur wieder φ' und φ'' so wie Ω' und Ω'', sondern auch l' und l'', und setzt

---

*) Das Maximum von $\frac{1}{64}e^6\sin^2\beta_0\cos\beta_0$, in Theilen des Kreishalbmessers ausgedrückt, ist $=0{,}0000000018$, und das Maximum des im Text genannten Gliedes wird daher erst $=0'',0001$, wenn $\varphi = 15^0{,}5$, $=0'',001$ wenn $\varphi = 155^0$ ist, u. s. w.

$$l'' - l' = \lambda \ ; \quad \Omega'' - \Omega' = \omega \ ; \quad \Delta\Omega'' - \Delta\Omega' = \Delta\omega$$

dann ist wieder λ der Längenunterschied zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt der geodätischen Linie, und es wird ausserdem

$$\lambda = \omega - \Delta\omega$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} e^2 \cos\beta_0 \left\{ \left(1 + \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4\right)\left(1 - \frac{1}{8} k^2 - \frac{5}{64} k^4\right) \chi \right.$$
$$\left. - r \left(\frac{1}{8} k^2 + \frac{1}{16} k^4\right) \cos(2\varphi' + \chi) \sin\chi \right\} \ . \quad (20)$$

wo wieder $\chi = \varphi'' - \varphi'$ ist. Dieser Ausdruck gilt für jeden beliebigen Werth von s.

21.

Nimmt man nun wieder an, dass die Länge der geodätischen Linie s eine kleine Grösse erster Ordnung ist, so lässt sich der eben gefundene Ausdruck für $\Delta\omega$ noch mehr vereinfachen. Wegen der Factoren χ und $\sin\chi$ wird er eine Ordnung genauer, wie in dem Falle, wo die geodätische Linie beliebig lang ist, und es können daher jetzt die mit k^4 und e^4 multiplicirten Glieder weggelassen, und der Factor $1 + \frac{1}{4} e^2$ zum allgemeinen Factor gemacht werden. Nimmt man indess hierin immer noch das Glied $\frac{1}{8} e^4$ auf, da es in der Anwendung so leicht zu berücksichtigen ist, so entsteht hieraus nicht der mindeste Nachtheil. Erwägt man nun, dass jetzt

$$\cos(2\varphi' + \chi) = \cos 2\varphi' - \chi \sin 2\varphi' \ , \quad \sin\chi = \chi$$

wird, und führt μ durch die Gleichung $k^2 = 4\mu \pm$ etc. ein, so bekommt man

$$\Delta\omega = \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{1}{16} e^6\right) \chi \cos\beta_0 \left\{1 - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\mu \cos 2\varphi' + \frac{1}{2r}\mu\chi \sin 2\varphi'\right\}$$

und wenn man hievon zum logarithmischen Ausdruck übergeht

$$\log.\text{nat}\, \Delta\omega = \log.\text{nat} \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{1}{16} e^6\right) \chi \cos\beta_0$$
$$- \mu \cos^2\varphi' + \frac{\mu}{2r} \chi \sin 2\varphi'$$

Dieser, bis auf Grössen siebenter Ordnung vollständige, Ausdruck ist bis auf das Glied $\frac{1}{16} e^6$ mit dem Jacobi'schen identisch.

22.

Ehe ich weiter gehe will ich die bis jetzt abgeleiteten Ausdrücke in der Reihenfolge, in welcher sie gebraucht werden, zusammen stellen, und die Logarithmen der constanten Factoren in der Annahme des im Art. 14 angeführten Werthes von e hinzufügen. Es sind nun zuerst die folgenden Formeln zu berechnen, in welchen B', α', s die ursprünglich gegebenen Grössen sind.

$$\operatorname{tg}\beta' = \sqrt{1-e^2}\,.\operatorname{tg}B'$$

wo

$$\log\sqrt{1-e^2} = 9.9985458202$$

ist. Ferner φ', β_0, Ω' aus den folgenden

$$(21)\quad \ldots \left\{\begin{aligned} \sin\beta_0 \sin\varphi' &= \cos\beta' \cos\alpha' \\ \sin\beta_0 \cos\varphi' &= \sin\beta' \\ \sin\beta_0 \sin\Omega' &= \cos\alpha' \\ \sin\beta_0 \cos\Omega' &= \sin\beta' \sin\alpha' \\ \cos\beta_0 &= \cos\beta' \sin\alpha' \end{aligned}\right.$$

oder, wenn man will, aus den folgenden

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\cos\alpha'}{\operatorname{tg}\beta'}\,; \quad \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\cos\varphi' \sin\alpha'} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha'}{\sin\varphi'}$$

$$\operatorname{tg}\Omega' = \frac{\operatorname{cotg}\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos\beta_0}$$

Ferner ist zu berechnen

$$\log\mu = \log(b\sin^2\beta_0) - c\sin^2\beta_0 + c'\sin^4\beta_0 - c''\sin^6\beta_0$$

wo

$$\log b = 7.2252588-10\,; \quad \log c = 7.164073-10$$
$$\log c' = 4.6002-10\,; \quad \log c'' = 2.198-10$$

und unter dem Zeichen »log« hier gleichwie im Folgenden der Briggische, oder gemeine, Logarithmus verstanden wird.

23.

Es werden von hier an die zu berechnenden Grössen grösstentheils anders, je nachdem s beliebig gross, oder eine kleine Grösse erster Ordnung ist. In der Voraussetzung, dass s beliebig gross ist, ist zuerst nach den Ausdrücken der Art. 13 oder 15 zu verfahren, in welchen aber noch die Coefficienten auf die zur Anwendung geeigneteste Form hinzuführen sind.

Aus dem im Art. 12 gegebenen Ausdruck des Coefficienten A folgt

$$\frac{1}{A} = 1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{9}{64}k^4 - \frac{23}{256}k^6$$

oder wenn man μ durch die (19) einführt,

$$\frac{1}{A} = 1 - \mu - \frac{1}{4}\mu^2 + \frac{1}{2}\mu^3$$

Aus dem Art. 13 folgt nun

$$S = \sigma \frac{1-\mu-\frac{1}{4}\mu^2+\frac{1}{2}\mu^3}{\sqrt{1-e^2}}$$

oder

$$S = \sigma + \sigma K - \sigma K'$$

wenn

$$K = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}}\,, \quad K' = \frac{\mu+\frac{1}{4}\mu^2-\frac{1}{2}\mu^3}{\sqrt{1-e^2}}$$

gesetzt wird. Es folgt hieraus

$$\log.\text{nat}\, K' = \log.\text{nat} \frac{\mu}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{1}{4}\mu - \frac{17}{32}\mu^2$$

und durch ähnliche Behandlung der Coefficienten B_1 und C_1 des Art. 13 ergiebt sich

$$\log.\text{nat}\, B_1 = \log.\text{nat}\, r\mu - \frac{5}{8}\mu^2$$

$$\log C_1 = \log \frac{r}{8}\mu^2$$

bis auf Grössen der achten Ordnung richtig, wenn man von dem Coefficienten D_1 absieht, von welchem im Art. 14 gezeigt worden ist, dass er durchaus nichts Merkliches geben kann.

Es ist nun zuerst

$$\sigma = \frac{r}{a}s$$

zu rechnen, und nimmt man an, dass s in Toisen gegeben ist, so wird

$$\log \frac{r}{a} = 8.7996015995$$

Wenn s in irgend einem anderen Maasse gegeben ist, oder wenn man einen anderen Werth von a anwenden will, so kann man diesen Werth des constanten Logarithmus demgemäss leicht abändern. Rechnet man nun ferner

$$\log K' = \log \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu^2$$

wo

$$\log \alpha = 0.0014542$$
$$\log \beta = 9.03572 - 10$$
$$\log \gamma = 9.363 \quad - 10$$

und setzt

$$\log K = 7{,}3255611$$

so wird

$$S = \sigma + \sigma K - \sigma K'$$

und rechnet man hierauf

$$\log B_1 = \log r\mu - \delta\mu^2$$
$$\log C_1 = \log r'\mu^2$$

wo

$$\log r = 5.3144251 \;;\quad \log\delta = 9.43366 - 10$$
$$\log r' = 4.4113$$

so bekommt man x entweder durch

$$(22)\quad x = B_1 \cos(2\varphi' + S - x)\sin(S - x) - C_1 \cos 2(2\varphi' + S - x)\sin 2(S - x)$$

indem man mit dem Näherungswerthe

$$x = B_1 \cos(2\varphi' + S)\sin S$$

anfängt, oder durch

$$(23)\quad x = B_1 \cos(2\varphi' + S)\sin S - C_1 \cos 2(2\varphi' + S)\sin 2S - \frac{B_1^2}{r}\cos 2(\varphi' + S)\cos(2\varphi' + S)\sin S$$

die aber nur bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist. Hierauf wird

$$(24)\quad \ldots\ldots\quad \varphi'' = \varphi' + S - x$$

Sei ferner

$$m = \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{8}e^4 + \tfrac{1}{16}e^6$$

$$E = 1 - \tfrac{1}{8}k^2 - \tfrac{5}{64}k^4 \;;\quad E' = re^2\left(\tfrac{1}{16}k^2 + \tfrac{1}{32}k^4\right)$$

Behandelt man E und E' wie eben B' und C', so entsteht

$$\text{log. nat } E = -\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{3}{8}\mu^2$$

$$\log E' = \log \tfrac{1}{4} re^2\mu$$

Wenn nun

$$\log E = -\varepsilon\mu - \zeta\mu^2$$
$$\log E' = \log \eta\mu$$

gesetzt wird wo

$$\log\varepsilon = 9.3367543 - 10 \;;\quad \log\zeta = 9.2118 - 10$$
$$\log\eta = 2.53678$$

ist, so wird

$$(25)\quad \varDelta\omega = mE(S - x)\cos\beta_0 - E'\cos\beta_0\cos(2\varphi' + S - x)\sin(S - x)$$

wo ausserdem

$$\log m = 7.5241068 - 10 \quad .$$

ist, und bemerkt werden kann, dass der Logarithmus des Factors $\cos(2\varphi' + S - x)\sin(S - x)$ schon in der Berechnung von x gebraucht wurde, und daher hier nicht besonders berechnet zu werden braucht.

24.

Wenn σ für eine kleine Grösse erster Ordnung gehalten werden darf, so fallen die im vor. Art. erklärten Rechnungen weg, und die folgenden treten an ihre Stelle. Nachdem $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{1-e^2}}$ gerechnet worden ist, wo σ dieselbe Bedeutung hat wie vorher, rechne man

$$\log \psi = \log \sigma' - f\mu \cos^2\varphi' - g\mu^2 \sin^2 2\varphi'$$

und hierauf

$$\log \chi = \log \psi + h\psi\mu \sin 2\varphi' + k\psi^2\mu \cos 2\varphi'$$
$$- h\psi\mu^2 \sin 4\varphi' - l\psi^3\mu \sin 2\varphi'$$

worauf

$$\varphi'' = \varphi' + \chi$$

wird. Die Constanten haben hier die folgenden Werthe

$$\log f = 9.93881 - 10 \;, \quad \log g = 9.63778 - 10$$
$$\log h = 4.32335 - 10 \;, \quad \log k = 8.8328 - 20$$
$$\log l = 3.2174 - 20$$

Hierauf ist

$$\log \varDelta\omega = \log m\chi \cos\beta_0 - \tfrac{1}{2} f\mu \cos^2\varphi' + \tfrac{1}{2} h\psi\mu \sin 2\varphi' \qquad (26)$$

wo m denselben Werth hat wie im vor. Art., und bemerkt werden kann, dass die beiden letzten Glieder bis auf den Factor $\frac{1}{2}$ schon in den Ausdrücken für ψ und χ vorkommen, und daher nicht von Neuem berechnet zu werden brauchen.

25.

Sind nun die im Vorhergehenden beschriebenen Rechnungen ausgeführt, so giebt wieder das im Art. 11 erklärte rechtwinkliche Dreieck, welches schon oben gedient hat um β_0, φ', Ω' zu erhalten, durch seine Anwendung auf den Endpunkt der geodätischen Linie die Bögen

α'', Ω'', ", und zwar entweder durch Anwendung der folgenden Gleichungen

$$(27) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos\beta''\sin\alpha'' = \cos\beta_0 \\ \cos\beta''\cos\alpha'' = \sin\beta_0\sin\varphi'' \\ \cos\beta''\sin\Omega'' = \sin\varphi'' \\ \cos\beta''\cos\Omega'' = \cos\beta_0\cos\varphi'' \\ \sin\beta'' = \sin\beta_0\cos\varphi'' \end{cases}$$

oder, wenn man will, durch

$$\operatorname{tg}\alpha'' = \frac{\operatorname{cotg}\beta_0}{\sin\varphi''}\,, \quad \operatorname{tg}\beta'' = \frac{\cos\alpha''}{\operatorname{tg}\varphi''} = \operatorname{tg}\beta_0\cos\varphi''\sin\alpha''$$
$$\operatorname{tg}\Omega'' = \frac{\operatorname{tg}\varphi''}{\cos\beta_0}$$

Nennt man wieder den Unterschied der geographischen Längen des Anfangs- und des Endpunkts der geodätischen Linie λ, so wird nun zunächst

$$\lambda = \Omega'' - \Omega' - \Delta\omega$$

und die Polhöhe B'' kann man aus β'' durch die mehrmals angeführte endliche Gleichung berechnen. Man kann statt dieser auch ihre bekannte Reihenentwickelung gebrauchen, und selbst diese auch auf den Unterschied $B''-B'$ anwenden. Setzt man $e = \sin\psi$, so ist allgemein

$$\beta = B - r\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi\sin 2B + \tfrac{1}{2}r\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\psi\sin 4B$$
$$-\tfrac{1}{3}r\operatorname{tg}^6\tfrac{1}{2}\psi\sin 6B \pm \ldots.$$

und diesem entgegengesetzt

$$B = \beta + r\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi\sin 2\beta + \tfrac{1}{2}r\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\psi\sin 4\beta$$
$$+\tfrac{1}{3}r\operatorname{tg}^6\tfrac{1}{2}\psi\sin 6\beta + \ldots$$

wo wieder $r = 206264'',8$ ist. Wendet man die letztere auf den genannten Unterschied an, so erhält man

$$B''-B' = \beta''-\beta' + 2r\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi\cos(\beta''+\beta')\sin(\beta''-\beta')$$
$$+ r\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\psi\cos 2(\beta''+\beta')\sin 2(\beta''-\beta')$$
$$+ \tfrac{2}{3}r\operatorname{tg}^6\tfrac{1}{2}\psi\cos 3(\beta''+\beta')\sin 3(\beta''-\beta')$$
$$+ \text{etc.}$$

worauf

$$B'' = B' + (B''-B')$$

wird. Der oben angenommene Werth von e giebt

$$\psi = 4^0 41' 9'',983$$

und hieraus folgt

$$\log 2r\,\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}\psi = 2.8392585\ ; \qquad \log r\,\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}\psi = 2.5382285$$

$$\log r\,\mathrm{tg}^4 \tfrac{1}{2}\psi = 9.76203-10\ ; \quad \log \tfrac{1}{2} r\,\mathrm{tg}^4 \tfrac{1}{2}\psi = 9.46100$$

$$\log \tfrac{2}{3} r\,\mathrm{tg}^6 \tfrac{1}{2}\psi = 6.810 \quad -10\ ; \quad \log \tfrac{1}{3} r\,\mathrm{tg}^6 \tfrac{1}{2}\psi = 6.509$$

die man, wenn man will, beliebig fortsetzen kann.

Es lässt sich noch ein anderer Ausdruck für die Hinführung von β auf B geben, der in vielen Fällen Anwendung findet. Die obige Reihe für B giebt, wenn man die Glieder, die von der Ordnung e^6 sind, übergeht,

$$B - \beta = 2\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\sin\beta\cos\beta + 2\frac{(1-\sqrt{1-e^2})^2}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}\sin\beta\cos\beta\,(2\cos^2\beta - 1)$$

Es ist aber

$$(1+\sqrt{1-e^2})^{-1} = \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}e^2+\ldots)\ ; \quad 1-\sqrt{1-e^2} = \tfrac{1}{2}e^2+\ldots$$

und der vorstehende Ausdruck lässt sich daher auch wie folgt schreiben,

$$B - \beta = (1-\sqrt{1-e^2})\sin\beta\cos\beta + \tfrac{1}{2}e^2(1-\sqrt{1-e^2})\sin\beta\cos^3\beta$$

welcher ebenfalls bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist. Hieraus ergiebt sich aber

$$\log.\mathrm{nat}\,(B-\beta) = \log.\mathrm{nat}\,(1-\sqrt{1-e^2})\sin\beta\cos\beta + \tfrac{1}{2}e^2\cos^2\beta$$

also, wenn man zu den Briggischen, oder gemeinen, Logarithmen übergeht,

$$\log(B-\beta) = \log(\eta\sin\beta\cos\beta) + \theta\cos^2\beta$$

wo

$$\eta = 1-\sqrt{1-e^2}\ , \quad \theta = \tfrac{1}{2}e^2 M$$

ist, wenn M den Modul der Briggischen Logarithmen bezeichnet. Richtet man die Coefficienten so ein, dass der aus diesem Ausdruck hervorgehende Werth von $B-\beta$ unmittelbar in Secunden erhalten wird, so erhält man

$$\log\eta = 2.8385319\ ; \quad \log\theta = 7.1612 - 10$$

Auf ähnliche Art bekommt man für die entgegengesetzte Reduction

$$\log(B-\beta) = \log(\eta\sin B\cos B) + \theta\sin^2 B$$

wo die Constanten dieselben sind. Diese Reihen gewähren eine kürzere Rechnung wie die obigen, und geben in der Regel die Hunderttheile der Secunden genau.

26.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass das hier eingeschlagene Verfahren unter anderen Rechnungen auf die Auflösung zweier rechtwinklichen sphärischen Dreiecke führt, und wenn s gross ist, so scheint mir dieses das Kürzeste und Angemessenste zu sein. Das erste dieser beiden Dreiecke muss jeden Falls zur Erlangung der Werthe von β_0 und φ' berechnet werden, und da die Berechnung eines zweiten Dreiecks nicht vermieden werden kann, so ist es in den Fällen, wo keine weiteren Reductionen möglich sind, am Einfachsten das zweite rechtwinkliche Dreieck, welches sich darbietet, anzuwenden. Wenn nun, wie oben angenommen wurde, s gross ist, dann ist in der That keine weitere Reduction möglich, wenn aber s klein ist, dann ist der Unterschied zwischen den beiden rechtwinklichen Dreiecken auch klein, und in dem schiefwinklichen Dreieck, welches den Unterschied jener bildet, ist nicht nur eine Seite immer eine kleine Grösse, sondern der dieser gegenüber liegende Winkel ist im Allgemeinen auch klein. Hiedurch ist die Möglichkeit gegeben durch Reihenentwickelungen mit aller wünschenswerthen Genauigkeit auf kürzere Weise zum Ziele zu gelangen, und deshalb soll im Folgenden dieses schiefwinkliche Dreieck der Betrachtung unterzogen werden.

27.

Man findet leicht, dass das schiefwinkliche Dreieck, welches den Unterschied der bisher betrachteten beiden rechtwinklichen Dreiecke bildet, die

Seiten χ, $90^0 - \beta'$, $90^0 - \beta''$, und die
Winkel ω, α'', $180^0 - \alpha'$

hat, wo wieder

$$\chi = \varphi'' - \varphi', \quad \omega = \Omega'' - \Omega'$$

ist. Wenn σ eine kleine Grösse erster Ordnung ist, so sind χ und im Allgemeinen auch ω solche Grössen.

Die auf dieses Dreieck angewandten Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie sind

$$\left.\begin{array}{l}\cos\beta''\sin\alpha'' = \cos\beta'\sin\alpha' \\ \cos\beta''\cos\alpha'' = \sin\beta'\sin\chi + \cos\beta'\cos\chi\cos\alpha' \\ \cos\beta''\sin\omega = \sin\chi\sin\alpha' \\ \cos\beta''\cos\omega = \cos\chi\cos\beta' + \sin\chi\sin\beta'\cos\alpha' \\ \sin\beta'' = \cos\chi\sin\beta' - \sin\chi\cos\beta'\cos\alpha'\end{array}\right\} \quad (28)$$

Man zieht diese Gleichungen durch die Substitutionen

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta\sin\eta = \sin\chi\cos\alpha' \\ \cos\theta\cos\eta = \cos\chi \\ \cos\theta\sin\mu = \cos\chi\sin\alpha' \\ \cos\theta\cos\mu = \cos\alpha' \\ \sin\theta = \sin\chi\sin\alpha'\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (29)$$

zusammen, und erhält dadurch

$$\left.\begin{array}{l}\cos\beta''\sin\omega = \sin\theta \\ \cos\beta''\cos\omega = \cos\theta\cos(\beta'-\eta) \\ \cos\beta''\sin(\alpha''-\mu) = -\sin\theta\sin(\beta'-\eta) \\ \cos\beta''\cos(\alpha''-\mu) = \cos(\beta'-\eta) \\ \sin\beta'' = \cos\theta\sin(\beta'-\eta)\end{array}\right\} \quad . \quad (30)$$

Die Herleitung der ersten, zweiten und fünften dieser Gleichungen aus den Grundgleichungen ist so einfach, dass sie keiner Erläuterung bedarf, aber die der dritten und vierten ist etwas mehr zusammengesetzt, weshalb ich das Hauptsächlichste davon angeben werde.

Multiplicirt man die erste Grundgleichung mit $\cos\theta\sin\mu$, die zweite mit $\cos\theta\cos\mu$ und addirt, so bekommt man in Folge der (29)

$$\cos\theta\cos\beta''\cos(\alpha''-\mu) = \sin\beta'\cos\alpha'\sin\chi + \cos\beta'\cos\chi$$

Multiplicirt man ferner die erste Grundgleichung mit $\cos\theta\cos\mu$, die zweite mit $\cos\theta\sin\mu$ und subtrahirt, so wird auch in Folge der (29)

$$\cos\theta\cos\beta''\sin(\alpha''-\mu) = \cos\beta'\sin\chi\sin\alpha'\sin\chi\cos\alpha' - \sin\beta'\sin\chi\sin\alpha'\cos\chi$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich leicht durch nochmalige Anwendung der (29) die obige dritte und vierte Gleichung. Man kann die Gleichungen (29) und (30) auch dadurch erhalten, dass man vom Scheitel des Winkels α'' einen grössten Kreisbogen senkrecht auf die gegenüber liegende Seite fällt.

Auf diese Gleichungen soll jetzt eine Reihenentwickelung gegründet

werden, die um zwei Ordnungen weiter geht wie die Gaussische und auch sonst noch von dieser etwas verschieden ist.

28.

Um zu dieser Reihenentwickelung zu gelangen, nehme ich zuerst die Gleichungen

$$\sin\theta = \sin\chi \sin\alpha'$$
$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg}\chi \cos\alpha'$$

vor, die aus den (29) folgen. Setzt man hier für $\sin\theta$, $\sin\chi$, $\operatorname{tg}\eta$, $\operatorname{tg}\chi$ die ersten Glieder der bekannten Reihen, durch welche sie dargestellt werden, und ausserdem

$$\theta_0 = \chi \sin\alpha'$$
$$\eta_0 = \chi \cos\alpha'$$

woraus $\chi^2 = \theta_0^2 + \eta_0^2$ folgt, so bekommt man zuerst

$$\theta = \theta_0 - \frac{1}{6}\theta_0\chi^2 + \frac{1}{120}\theta_0\chi^4 + \frac{1}{6}\theta^3 - \frac{1}{120}\theta^5$$
$$\eta = \eta_0 + \frac{1}{3}\eta_0\chi^2 + \frac{2}{15}\eta_0\chi^4 - \frac{1}{3}\eta^3 - \frac{2}{15}\eta^5$$

Mit Anwendung der Gleichung $\chi^2 = \theta_0^2 + \eta_0^2$ folgt hieraus bis auf Grössen der fünften Ordnung

$$\theta = \theta_0 - \frac{1}{6}\theta_0\eta_0^2\ , \quad \eta = \eta_0 + \frac{1}{3}\eta_0\theta_0^2$$

woraus

$$\theta^3 = \theta_0^3 - \frac{1}{2}\theta_0^3\eta_0^2\ , \quad \eta^3 = \eta_0^3 + \eta_0^3\theta_0^2$$

sich ergiebt. Substituirt man diese, und eliminirt χ wieder durch die eben gegebene Gleichung, so erhält man leicht

$$\theta = \theta_0\left(1 - \frac{1}{6}\eta_0^2 + \frac{1}{120}\eta_0^4 - \frac{1}{45}\theta_0^2\eta_0^2\right)$$
$$\eta = \eta_0\left(1 + \frac{1}{3}\theta_0^2 + \frac{2}{15}\theta_0^4 - \frac{1}{15}\theta_0^2\eta_0^2\right)$$

welche bis auf Grössen siebenter Ordnung richtig sind. Die dritte und vierte der (29) zeigen, dass μ wenig von α' verschieden ist, setzt man daher

$$\mu = \alpha' - \tau$$

so geben diese Gleichungen

(31) . . . . $\operatorname{tg}(\alpha' - \tau) = \operatorname{tg}\alpha' \cos\chi$

und hieraus bekommt man leicht

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{(1-\cos\chi)\sin\alpha'\cos\alpha'}{1-(1-\cos\chi)\sin^2\alpha'}$$

oder bis auf Grössen achter Ordnung

$$\tau = \left(\tfrac{1}{2}\chi^2 - \tfrac{1}{24}\chi^4 + \tfrac{1}{720}\chi^6\right)\sin\alpha'\cos\alpha'$$
$$+ \left(\tfrac{1}{4}\chi^4 - \tfrac{1}{24}\chi^6\right)\sin^3\alpha'\cos\alpha'$$
$$+ \tfrac{1}{8}\chi^6\sin^5\alpha'\cos\alpha' - \tfrac{1}{3}\tau^3$$

Diese Gleichung giebt bis auf Grössen vierter Ordnung

$$\tau = \tfrac{1}{2}\chi^2\sin\alpha'\cos\alpha'$$

und erhebt man diese in den Cubus, und eliminirt damit τ^3 aus der vorstehenden, so ergiebt sich mit demselben Grade der Genauigkeit.

$$\tau = \left(\tfrac{1}{2}\chi^2 - \tfrac{1}{24}\chi^4 + \tfrac{1}{720}\chi^6\right)\sin\alpha'\cos\alpha'$$
$$+ \left(\tfrac{1}{4}\chi^2 - \tfrac{1}{12}\chi^6\right)\sin^3\alpha'\cos\alpha' + \tfrac{1}{6}\chi^6\sin^5\alpha'\cos\alpha'$$

Die oben gefundenen Ausdrücke für θ und η geben aber leicht durch die Umkehrung

$$\chi\sin\alpha' = \theta\left(1 + \tfrac{1}{6}\eta^2 + \tfrac{7}{360}\eta^4 - \tfrac{2}{45}\eta^2\theta^2\right)$$
$$\chi\cos\alpha' = \eta\left(1 - \tfrac{1}{3}\theta^2 - \tfrac{1}{45}\theta^4 - \tfrac{2}{45}\eta^2\theta^2\right)$$

und hiedurch erhält man mit der hier erforderlichen Genauigkeit

$$\chi^2\sin\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta\left(1 + \tfrac{1}{6}\eta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^2 + \tfrac{7}{360}\eta^4 - \tfrac{13}{90}\eta^2\theta^2 - \tfrac{1}{45}\theta^4\right)$$
$$\chi^4\sin^3\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta\left(\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^4 + \tfrac{1}{2}\eta^2\theta^2\right)$$
$$\chi^6\sin^5\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta.\theta^4$$

Da nun die Gleichung $\chi^2 = \eta_0{}^2 + \theta_0{}^2$

$$\chi^2 = \eta^2 + \theta^2 - \tfrac{1}{3}\eta^2\theta^2$$

giebt, so geben die vorstehenden Ausdrücke

$$\chi^4\sin\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta\left(\eta^2 + \theta^2 + \tfrac{1}{6}\eta^4 - \tfrac{1}{2}\eta^2\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^4\right)$$
$$\chi^6\sin\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta\,(\eta^4 + 2\eta^2\theta^2 + \theta^4)$$
$$\chi^6\sin^3\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta\,(\eta^2\theta^2 + \theta^4)$$

Eliminirt man hiemit χ aus dem Ausdruck für τ, so erhält man

$$\tau = \tfrac{1}{2}\theta\eta\left(1 + \tfrac{1}{12}\eta^2 + \tfrac{1}{12}\theta^2 + \tfrac{1}{120}\eta^4 - \tfrac{1}{72}\eta^2\theta^2 + \tfrac{1}{120}\theta^4\right)$$

bis auf Grössen achter Ordnung genau.

29.

Setzt man $\gamma = \mu - \alpha''$, so geben die Gleichungen (30)

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos(\beta' - \eta)}$$
$$\operatorname{tg}\gamma = \sin\theta \operatorname{tg}(\beta' - \eta)$$

deren Reihenentwickelung auf ähnliche Art, wie die von θ und η bewirkt werden kann. Sei

$$\omega_0 = \frac{\theta}{\cos(\beta' - \eta)}$$
$$\gamma_0 = \theta \operatorname{tg}(\beta' - \eta)$$

woraus $\theta^2 = \omega_0^2 - \gamma_0^2$ folgt, so bekommt man zuerst

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{3}\omega_0\theta^2 + \frac{2}{15}\omega_0\theta^4 - \frac{1}{3}\omega^3 - \frac{2}{15}\omega^5$$
$$\gamma = \gamma_0 - \frac{1}{6}\gamma_0\theta^2 + \frac{1}{120}\gamma_0\theta^4 - \frac{1}{3}\gamma^3 - \frac{2}{15}\gamma^5$$

Hieraus folgt

$$\omega^3 = \omega_0^3 + \omega_0^3\theta^2 - .\omega_0^5\ ; \quad \gamma^3 = \gamma_0^3 - \frac{1}{2}\gamma_0^3\theta^2 - \gamma_0^5$$

eliminirt man hiemit ω und γ, so wie mit $\theta^2 = \omega_0^2 - \gamma_0^2$ den Bogen θ auf den rechten Seiten dieser Gleichungen, so ergiebt sich

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{1}{3}\gamma_0^2 + \frac{2}{15}\gamma_0^4 + \frac{1}{15}\gamma_0^2\omega_0^2\right)$$
$$\gamma = \gamma_0\left(1 - \frac{1}{6}\gamma_0^2 - \frac{1}{6}\omega_0^2 + \frac{1}{24}\gamma_0^4 + \frac{3}{20}\gamma_0^2\omega_0^2 + \frac{1}{120}\omega_0^4\right)$$

die bis auf Grössen siebenter Ordnung richtig sind. Setzt man in dem Quotienten der letzten (30) durch die zweite

$$\beta'' = \beta' - \eta - v$$

so bekommt man

$$\operatorname{tg}(\beta' - \eta - v) = \operatorname{tg}(\beta' - \eta)\cos\omega$$

die der (31) völlig ähnlich ist, und daher eben so behandelt werden kann wie diese. Man bekommt also zuerst

$$v = \left(\frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{24}\omega^4 + \frac{1}{720}\omega^6\right)\sin(\beta' - \eta)\cos(\beta' - \eta)$$
$$+ \left(\frac{1}{4}\omega^4 - \frac{1}{12}\omega^6\right)\sin^3(\beta' - \eta)\cos(\beta' - \eta)$$
$$+ \frac{1}{6}\omega^6\sin^5(\beta' - \eta)\sin(\beta' - \eta)$$

Die obigen Gleichungen geben aber

$$\omega\sin(\beta' - \eta) = \gamma_0\frac{\omega}{\omega_0}\ ; \quad \omega\cos(\beta' - \eta) = \theta\frac{\omega}{\omega_0}$$

und durch Umkehrungen erhält man aus den Ausdrücken für ω und γ

$$\gamma_0 = \gamma\left(1 + \frac{1}{6}\gamma^2 + \frac{1}{6}\omega^2 + \frac{1}{24}\gamma^4 + \frac{13}{180}\gamma^2\omega^2 + \frac{7}{360}\omega^4\right)$$

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{1}{3}\gamma^2 + \frac{1}{45}\gamma^4 - \frac{2}{45}\gamma^2\omega^2\right)$$

und hiemit

$$\omega\sin(\beta'-\eta) = \gamma\left(1 - \frac{1}{6}\gamma^2 + \frac{1}{6}\omega^2 + \frac{1}{120}\gamma^4 - \frac{1}{36}\gamma^2\omega^2 + \frac{7}{360}\omega^4\right)$$

$$\omega\cos(\beta'-\eta) = \theta\left(1 - \frac{1}{3}\gamma^2 + \frac{1}{45}\gamma^4 - \frac{2}{45}\gamma^2\omega^2\right)$$

ferner

$$\omega^2\sin(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{6}\omega^2 + \frac{31}{360}\gamma^4 - \frac{23}{180}\gamma^2\omega^2 + \frac{7}{360}\omega^4\right)$$

$$\omega^4\sin(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\left(\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2\gamma^2 + \frac{1}{6}\omega^4\right)$$

$$\omega^6\sin(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\,.\,\omega^4$$

$$\omega^4\sin^3(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\left(\gamma^2 - \frac{5}{6}\gamma^4 + \frac{1}{2}\gamma^2\omega^2\right)$$

$$\omega^6\sin^3(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\,.\,\gamma^2\omega^2$$

$$\omega^6\sin^5(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\,.\,\gamma^4$$

Substituirt man diese in den obigen Ausdruck für v, so entsteht

$$v = \frac{1}{2}\theta\gamma\left(1 + \frac{1}{12}\omega^2 + \frac{1}{360}\gamma^4 - \frac{1}{360}\gamma^2\omega^2 + \frac{1}{120}\omega^4\right)$$

bis auf Grössen achter Ordnung vollständig. Hiemit sind alle Bögen entwickelt.

30.

Statt der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke für die Bögen θ, η, τ, ω, γ, v selbst, ist es vortheilhafter die ihrer Logarithmen anzuwenden, die man aus jenen leicht erhalten kann, und die sich wie folgt stellen lassen,

$$\log.\text{nat}\,\theta = \log.\text{nat}\,\theta_0 - \frac{1}{6}\eta_0^2 - \frac{1}{180}\eta_0^4 - \frac{1}{45}\eta_0^2\theta_0^2$$

$$\log.\text{nat}\,\eta = \log.\text{nat}\,\eta_0 + \frac{1}{3}\theta_0^2 + \frac{7}{90}\theta_0^4 - \frac{1}{45}\eta_0^2\theta_0^2$$

$$\log.\text{nat}\,\tau = \log.\text{nat}\,\frac{1}{2}\theta\eta + \frac{1}{12}\eta^2 + \frac{1}{12}\theta^2 + \frac{7}{1440}\eta^4 - \frac{1}{48}\eta^2\theta^2 + \frac{7}{1440}\theta^4$$

$$\log.\text{nat}\,\omega = \log.\text{nat}\,\omega_0 - \frac{1}{3}\gamma_0^2 + \frac{7}{90}\gamma_0^4 + \frac{1}{15}\gamma_0^2\omega_0^2$$

$$\log.\text{nat}\,\gamma = \log.\text{nat}\,\gamma_0 - \frac{1}{6}\gamma_0^2 - \frac{1}{6}\omega_0^2 + \frac{1}{36}\gamma_0^4 + \frac{11}{90}\gamma_0^2\omega_0^2 - \frac{1}{180}\omega_0^4$$

$$\log.\text{nat}\,v = \log.\text{nat}\,\frac{1}{2}\theta\gamma + \frac{1}{12}\omega^2 + \frac{1}{360}\gamma^4 - \frac{1}{360}\gamma^2\omega^2 + \frac{7}{1440}\omega^4$$

31.

Schreibt man nun die erhaltenen Ausdrücke in der Reihenfolge hin, in welcher sie zur Anwendung kommen, geht zu den **Briggi**schen Logarithmen über, und richtet alle Ausdrücke so ein, dass die in denselben enthaltenen Bögen in Secunden ausgedrückt werden müssen, und wieder in Secunden ausgedrückt aus denselben hervorgehen, so ist das Ergebniss der hier ausgeführten Reihenentwickelungen in den folgenden, zu berechnenden, Ausdrücken enthalten, in welchen wieder unter der Bezeichnung log der **Briggi**sche Logarithmus zu verstehen ist.

$$\theta_0 = \chi \sin \alpha'$$

$$\eta_0 = \chi \cos \alpha'$$

$$\log \theta = \log \theta_0 - 2\mu\eta_0^2 - 8\mu'\eta_0^4 - 96\mu'\eta_0^2\theta_0^2$$

$$\log \eta = \log \eta_0 + 4\mu\theta_0^2 + 112\mu'\theta_0^4 - 96\mu'\eta_0^2\theta_0^2$$

$$\log \tau = \log \varrho'\theta\eta + \mu\eta^2 + \mu\theta^2 + 7\mu'\eta^4 - 30\mu'\eta^2\theta^2 + 7\mu'\theta^4$$

$$\omega_0 = \frac{\theta}{\cos(\beta' - \eta)}$$

$$\gamma_0 = \theta \operatorname{tg}(\beta' - \eta)$$

$$\log \omega = \log \omega_0 - 4\mu\gamma_0^2 + 112\mu'\gamma_0^4 + 96\mu'\gamma_0^2\omega_0^2$$

$$\log \gamma = \log \gamma_0 - 2\mu\gamma_0^2 - 2\mu\omega_0^2 - 8\mu'\omega_0^4 + 176\mu'\omega_0^2\gamma_0^2 + 40\mu'\gamma_0^4$$

$$\log v = \log \varrho'\theta\gamma + \mu\omega^2 + 4\mu'\gamma^4 - 4\mu'\omega^2\gamma^2 + 7\mu'\omega^4$$

$$\beta'' = \beta' - \eta - v$$

$$\alpha'' = \alpha' - \gamma - \tau$$

$$\lambda = \omega - \Delta\omega$$

Ausserdem ist hier, wenn M den Modul der **Briggi**schen Logarithmen bezeichnet,

$$\varrho' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{206264'',8}$$

$$\mu = \frac{1}{3}\varrho'^2 M$$

$$\mu' = \frac{1}{90}\varrho'^4 M$$

gesetzt worden. Die Zahlenwerthe dieser Constanten sind:

$$\log \varrho' = 4.3845449 - 10$$

$$\log \mu = 7.9297528 - 20$$

$$\log 4\mu = 8.5318128 - 20$$

$$\log \mu' = 5.22172 \quad - 30$$

$$\log 4\mu' = 5.82378 \quad - 30$$

$$\log 7\mu' = 6.0668 \quad -30$$
$$\log 8\mu' = 6.1248 \quad -30$$
$$\log 30\mu' = 6.6988 \quad -30$$
$$\log 96\mu' = 7.2040 \quad -30$$
$$\log 112\mu' = 7.2709 \quad -30$$
$$\log 176\mu' = 7.4672 \quad -30$$

Lässt man in den vorstehenden Ausdrücken die Glieder der höchsten Ordnungen weg, so gehen sie in die folgenden einfacheren über,

$$\log\theta = \log\theta_0 - 2\mu\eta_0^2$$
$$\log\eta = \log\eta_0 + 4\mu\theta_0^2$$
$$\log\tau = \log\varrho'\theta\eta + \mu\eta^2 + \mu\theta^2$$
$$\log\omega = \log\omega_0 - 4\mu\gamma_0^2$$
$$\log\gamma = \log\gamma_0 - 2\mu\gamma_0^2 - 2\mu\omega_0^2$$
$$\log v = \log\varrho'\theta\gamma + \mu\omega^2$$

von welchen die für θ, η, ω, γ bis auf Grössen der fünften, und die für τ und v bis auf Grössen der sechsten Ordnung genau sind.

Wenn irgend eine oder mehrere der Grössen θ_0, η_0, ω_0, γ_0 negativ werden, so werden diese Ausdrücke sowohl wie die vorhergehenden, vollständigeren dadurch nicht im Geringsten geändert, nur werden die betreffenden Unbekannten θ, η, etc. auch negativ.

Ich bemerke hiezu noch, dass bei der Anwendung dieses Dreiecks, oder der obigen daraus folgenden Reihenentwickelungen, die Berechnung der Bögen Ω' und Ω'', die in den Artt. 22 und 25 verlangt wurde, überflüssig wird.

32.

In Bezug auf die oben entwickelte genäherte Auflösung des schiefwinklichen, sphärischen Dreiecks ist noch Folgendes zu bemerken. Wenn alle im vor. Art. angesetzte Glieder merklich werden, so erfordert die genäherte Auflösung das Aufschlagen und Niederschreiben von einer grösseren Anzahl von Zahlen, wie die strenge Auflösung, aber die Rechnung ist bequemer, namentlich in dem Falle, wo man die Genauigkeit so weit treiben will, wie die Anwendung von Logarithmen von zehn Stellen es erlaubt, und auch schon bei Anwendung von siebenstelligen

Logarithmen möchte ich sie der strengen Auflösung vorziehen. Sie giebt in den Fällen, in welchen sie überhaupt anwendbar ist, bei Anwendung von gleichziffrichen Logarithmen die letzte Decimale der Secunde genauer wie jene. Ueber die Grenze ihrer Anwendbarkeit lässt sich nur so viel sagen dass sie, wenn man die Hunderttheile von Secunden richtig haben will, nicht mehr angewandt werden darf, wenn die Bögen θ, η, ω, γ die Grösse von 10^0 wesentlich übersteigen, indem alsdann die höheren, nicht hinzugezogenen Glieder merklich werden können. Will man im Resultat eine grössere Anzahl von Decimalen richtig erhalten, so darf man selbstverständlich nicht bis zu der eben genannten Grenze gehen. Ich will hier das folgende Beispiel zur Erläuterung einschalten. Sei

$$\chi = 10^0, \quad \beta' = 40^0, \quad \alpha' = 140^0$$

dann giebt die durch die Gleichungen (29) und (30) ausgeführte, strenge Auflösung

$$\eta = -7^0\,41'\,33'',47\,; \qquad \omega = 9^0\,28'\,24'',96$$
$$\mu = 140\;\;25\;\;52,72\,; \qquad \alpha'' = 133\;\;26\;\;22,93$$
$$\beta'' = 47\;\;18\;\;\;2,60$$

und die genäherte

$$\begin{aligned} \log \theta_0 &= 4.3643700 \\ &- 0.0012939 \\ &- 0.0000008 \\ &- 0.0000065 \\ \log \theta &= 4.3630688 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \eta_0 &= 4.4405565n \\ &+ 0.0018220 \\ &+ 0.0000054 \\ &- 0.0000065 \\ \log \eta &= 4.4423774n \end{aligned}$$

(Den Bogen θ braucht man nicht.)

$$\eta = -7^0\,41'\,33'',47$$
$$\beta' - \eta = 47\;\;41\;\;33,47$$

$$\begin{aligned} \log \varrho'\theta\eta &= 3.1899911n \\ &+ 0.0006524 \\ &+ 0.0004528 \\ &+ 0.0000007 \\ &- 0.0000020 \\ &+ 0.0000003 \\ \log \tau &= 3.1910953n \\ \tau &= -0^0\,25'\,52'',73 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \omega_0 &= 4.5349843 \\ &- 0.0021863 \\ &+ 0.0000077 \\ &+ 0.0000121 \\ \log \omega &= 4.5328178 \\ \omega &= 9^0\,28'\,24'',98 \end{aligned}$$

$$\log \gamma_0 = 4.4039486$$
$$- 0.0010932$$
$$- 0.0019987$$
$$+ 0.0000028$$
$$+ 0.0000221$$
$$- 0.0000018$$
$$\log \gamma = 4.4008798$$
$$\gamma = 6^0\, 59'\, 29'',80$$

$$\log \varrho'\theta\gamma = 3.1484933$$
$$+ 0.0009894$$
$$+ 0.0000016$$
$$- 0.0000005$$
$$+ 0.0000003$$
$$\log v = 3.1494841$$
$$v = 0^0\, 23'\, 30'',86$$

$$\alpha'' = 133^0\, 26'\, 22'',93$$
$$\beta'' = 47\;\; 18\;\; 2,61$$

mit dem Ergebniss der strengen Auflösung übereinstimmend. Hier hätte ich in der Berechnung der Bögen τ und v die Glieder sechster Ordnung weglassen können, da man leicht erkennt, dass sie auf das Resultat ohne Einfluss sind.

Bei gleichen Werthen von χ ist in Bezug auf die Anwendbarkeit der genäherten Auflösung, namentlich zur Bestimmung von ω, die Lage der geodätischen Linie auf der Erdoberfläche in Betracht zu ziehen, da bei gleichen sonstigen Umständen der Bogen ω desto grösser wird, je näher die geodätische Linie einem der Pole liegt. Um die Wirkung hievon anschaulich zu machen, will ich im obigen Beispiel $\beta'=60^0$ setzen, während die beiden anderen Data unverändert gelassen werden sollen. Hierauf behalten η, θ, μ ihre vorigen Werthe, und für die anderen Bögen giebt die strenge Auflösung

$$\omega = 16^0\, 29'\;\; 2'',80$$
$$\alpha'' = 125\;\; 12\;\; 43,31$$
$$\beta'' = 66\;\; 50\;\; 8,02$$

während die genäherte

$$\omega = 16^0\, 29'\;\; 5'',05$$
$$\alpha'' = 125\;\; 12\;\; 43,33$$
$$\beta'' = 66\;\; 50\;\; 8,01$$

giebt. Die letztere reicht also hier zur Bestimmung von ω nicht aus, während sie immer noch alle übrigen Bögen genau giebt.

Die abgekürzten Formeln des vor. Art. gewähren eine sehr einfache und bequeme Rechnung, aber es versteht sich von selbst, dass ihre Anwendung weit mehr beschränkt ist, wie die der vollständigeren. Man darf sie, wenn die obige Genauigkeit erreicht werden soll, bei

Bögen, die 2° merklich übersteigen, nicht mehr anwenden, und die Grenze ihrer Anwendbarkeit wird noch kleiner, wenn man eine grössere Genauigkeit in die Resultate legen will.

33.

Es sind noch mehrere Nebenaufgaben zu erörtern, die sich als specielle Fälle der eben gelösten Hauptaufgabe darstellen. Zuerst nehme ich an, dass bei beliebigem s das Azimuth α' klein sei. Es kann zwar in diesem Falle die obige Auflösung der Hauptaufgabe für einen beliebigen Werth von s wieder unverändert angewandt werden, es giebt aber derselbe Anlass zu besonderen Reihenentwickelungen, die hier abgeleitet werden sollen. Statt der Gleichungen (21) des Art. 22 kann eine Reihenentwickelung derselben angewandt werden. Setzt man

$$(32)\quad \varphi' = 90^0 - \beta' - \pi'\,;\quad \Omega' = 90^0 - \varepsilon'\,;\quad \beta_0 = 90^0 - \zeta$$

so geben sie

$$\operatorname{tg}(\beta' + \pi') = \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\cos\alpha'}$$
$$\operatorname{tg}\varepsilon' = \sin\beta' \operatorname{tg}\alpha'$$
$$\sin\zeta = \cos\beta' \sin\alpha'$$

und diese werden mit den im Art. 28 entwickelten Gleichungen identisch, wenn man in den letzteren

$$\theta\,,\quad \eta\,,\quad \chi\,,\quad \alpha'\,,\qquad \tau \quad \text{bez. in}$$
$$\zeta\,,\quad \varepsilon'\,,\quad \alpha'\,,\quad 90^0 - \beta'\,,\quad \pi'$$

verwandelt. Die Ausdrücke des Art. 31 geben daher sogleich

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_0' &= \alpha' \sin\beta' \\ \zeta_0 &= \alpha' \cos\beta' \\ \log\varepsilon' &= \log\varepsilon_0' + 4\mu\zeta_0^2 + 112\mu'\zeta_0^4 - 96\mu'\varepsilon_0'^2\zeta_0^2 \\ \log\zeta &= \log\zeta_0 - 2\mu\varepsilon_0'^2 - 8\mu'\varepsilon_0'^4 - 96\mu'\varepsilon_0'^2\zeta_0^2 \\ \log\pi' &= \log\varrho'\zeta\varepsilon' + \mu\varepsilon'^2 + \mu\zeta^2 + 7\mu'\varepsilon'^4 - 30\mu'\varepsilon'^2\zeta^2 + 7\mu'\zeta^4 \end{aligned}\right.$$

wo ϱ', μ, μ' dieselben sind wie im Art. 31. Die (32) geben hierauf φ', Ω', β_0, die aber nicht besonders berechnet zu werden brauchen. Denn man erhält sogleich

$$(34)\quad \log\mu = \log(b\cos^2\zeta) - c\cos^2\zeta + c'\cos^4\zeta - c''\cos^6\zeta$$

wo μ, b, c, c', c'' dieselbe Bedeutung haben wie im Art. 22, und rechnet

man hierauf durch die betreffenden Ausdrücke des Art. 23, S, B_1, C_1, so wird statt der (22)

$$x = -B_1\cos\{2(\beta'+\pi')-(S-x)\}\sin(S-x) \quad . \quad . \quad (35)$$
$$-C_1\cos 2\{2(\beta'+\pi')-(S-x)\}\sin 2(S-x)$$

oder statt der (23)

$$x = -B_1\cos(2(\beta'+\pi')-S)\sin S - C_1\cos 2(2(\beta'+\pi')-S)\sin 2S \quad (36)$$
$$-\frac{B_1^2}{r}\cos 2(\beta'+\pi'-S)\cos(2(\beta'+\pi')-S)\sin S$$

worauf sich wieder

$$\chi = S - x$$

und statt der (25)

$$\Delta\omega = mE\chi\sin\zeta + E'\sin\zeta\cos(2(\beta'+\pi')-\chi)\sin\chi \quad . \quad (37)$$

ergiebt, wo m, E, E' dieselben Werthe haben wie im Art. 23. Setzt man nun in den Gleichungen (27) des Art. 25

$$\Omega'' = 90^0 - \varepsilon''\,; \quad \beta'' = 90^0 - \varphi'' - \pi'' = \beta' + \pi' - \chi - \pi''$$

so geben sie

$$\operatorname{tg}\alpha'' = \frac{\operatorname{tg}\zeta}{\cos(\beta'+\pi'-\chi)}$$
$$\operatorname{tg}\varepsilon'' = \sin\zeta\operatorname{tg}(\beta'+\pi'-\chi)$$
$$\operatorname{tg}(\beta'+\pi'-\chi-\pi'') = \operatorname{tg}(\beta'+\pi'-\chi)\cos\alpha''$$

und vergleicht man diese mit den im Art. 29 entwickelten Gleichungen, so zeigt sich, dass die Identität hergestellt wird, wenn man

$$\omega\,,\quad \gamma\,,\quad \theta\,,\quad \beta'-\eta\,,\qquad v \quad \text{bez. in}$$
$$\alpha''\,,\quad \varepsilon''\,,\quad \zeta\,,\quad \beta'+\pi'-\chi\,,\quad \pi''$$

verwandelt. Die Ausdrücke des Art. 31 geben daher sogleich

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0'' &= \frac{\zeta}{\cos(\beta'+\pi'-\chi)} \\
\varepsilon_0'' &= \zeta\operatorname{tg}(\beta'+\pi'-\chi) \\
\log\alpha'' &= \log\alpha_0''-4\mu\varepsilon_0''^2+112\mu'\varepsilon_0''^4+96\mu'\varepsilon_0''^2\alpha_0''^2 \\
\log\varepsilon'' &= \log\varepsilon_0''-2\mu\varepsilon_0''^2-2\mu\alpha_0''^2-8\mu'\alpha_0''^4+176\mu'\alpha_0''^2\varepsilon_0''^2+40\mu'\varepsilon_0''^4 \\
\log\pi'' &= \log\varrho'\zeta\varepsilon''+\mu\alpha''^2+7\mu'\alpha''^4-4\mu'\alpha''^2\varepsilon''^2+4\mu'\varepsilon''^4
\end{aligned}\right\} (38)$$

und hierauf wird schliesslich

$$\beta'' = \beta' + \pi' - \chi - \pi''$$
$$\lambda = \varepsilon' - \varepsilon'' - \Delta\omega$$

Man kann diese Reihen auch anwenden, wenn ausser α' auch s klein ist, nur wird man alsdann χ und $\Delta\omega$ aus den Ausdrücken des Art. 24

berechnen, in welche man auch ζ und $\beta'+\pi'$ statt β_0 und φ' einführen kann. Die betreffenden Ausdrücke werden hiemit

$$(39)\quad \begin{cases} \log\psi = \log\sigma' - f\mu\sin^2(\beta'+\pi') - g\mu^2\sin^2 2(\beta'+\pi') \\ \log\chi = \log\psi + h\psi\mu\sin 2(\beta'+\pi') - k\psi^2\mu\cos 2(\beta'+\pi') \\ \qquad\qquad + h\psi\mu^2\sin 4(\beta'+\pi') - l\psi^3\mu\sin 2(\beta'+\pi') \\ \log\Delta\omega = \log m\chi\sin\zeta - \frac{1}{2}f\mu\sin^2(\beta'+\pi') + \frac{1}{2}h\psi\mu\sin 2(\beta'+\pi') \end{cases}$$

wo σ', f, g, etc. dieselben sind wie im Art. 24.

Wenn α' nahe $= 180^0$ ist, dann sei

$$180^0 - \alpha' = \alpha_1'$$

und

$$\varepsilon_0' = -\alpha_1'\sin\beta'$$
$$\zeta_0 = +\alpha_1'\cos\beta'$$

worauf alle anderen Ausdrücke wieder unverändert angewandt werden können.

34.

Betrachten wir ausserdem die beiden speciellen Fälle $\alpha'=0$ und $\alpha'=180^0$, in welchen die geodätische Linie einen Theil eines Meridians bildet, im ersten Falle sich vom Anfangspunkt nach Süden, und im zweiten sich nach Norden erstreckt. Die Gleichungen (21) und (27) geben nun, wenn man immer $\beta_0 = 90^0$ setzt, welches statthaft ist,

$$\varphi' = 90^0 \mp \beta' \;;\quad \varphi'' = 90^0 \mp \beta''$$

wo die oberen Zeichen für den ersten, und die unteren für den zweiten Fall gelten, gleichwie im Folgenden auch der Fall sein wird. Aus dem Art. 22 erhält man hierauf

$$\log\mu = \log b - c + c' - c''$$

oder

$$\log\mu = 7.2238036$$

und substituirt man den obigen Ausdruck für φ', und setzt

$$\chi = S + x'$$

so werden die Ausdrücke des Art. 23

$$x' = B_1\cos(2\beta' \mp (S+x'))\sin(S+x') + C_1\cos 2(2\beta' \mp (S+x'))\sin 2(S+x')$$

oder

$$x' = B_1 \cos(2\beta' \mp S) \sin S + C_1 \cos 2(2\beta' \mp S) \sin 2S$$
$$+ \frac{B_1^2}{r} \cos 2(\beta' \mp S) \cos(2\beta' \mp S) \sin S$$

und die des Art. 24

$$\log\psi = \log\sigma' - f\mu \sin^2\beta' - g\mu^2 \sin^2 2\beta'$$
$$\log\chi = \log\psi \pm h\psi\mu \sin 2\beta' - k\psi^2\mu \cos 2\beta'$$
$$\pm h\psi\mu^2 \sin 4\beta' \mp l\psi^3\mu \sin 2\beta'$$

und hierauf erhält man

$$\beta'' = \beta' \mp \chi$$

Der Längenunterschied λ ist hier selbstverständlich gleich Null.

35.

Es ist noch der specielle Fall $\alpha' = 90^0$ besonders zu betrachten, mit anderen Worten die Aufgabe zu lösen: »wenn von einem gegebenen »Punkt eines Meridians an eine gegebene geodätische Linie senkrecht ge»zogen wird, die geographische Lage des Endpunkts dieser Linie, nebst »dem Azimuth an demselben, zu finden«.

Sei wieder B' die Polhöhe des Anfangspunkts der auf dem Meridian senkrecht gezogenen geodätischen Linie s, und β' die reducirte Breite dieses Punkts, dann geben die Gleichungen (21)

$$\varphi' = 0\ , \quad \beta_0 = \beta'\ , \quad \Omega' = 0$$

und folglich wird

$$\log\mu = \log(b \sin^2\beta') - c \sin^2\beta' + c' \sin^4\beta' \quad . \quad . \quad (40)$$

Die Gleichungen des Art. 23 geben, wenn wie früher

$$\chi = S - x$$

gesetzt wird,

$$x = \tfrac{1}{2} B_1 \sin 2(S - x) - \tfrac{1}{2} C_1 \sin 4(S - x) \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

oder

$$x = \tfrac{1}{2} B_1 \sin 2S - \tfrac{1}{2} C_1 \sin 4S - \frac{B_1^2}{4r} \sin 4S$$

$$\Delta\omega = mE\chi \cos\beta' - \tfrac{1}{2} E' \cos\beta' \sin 2\chi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

und die des Art. 24

$$\left.\begin{aligned} \log\psi &= \log\sigma' - f\mu \\ \log\chi &= \log\psi + k\psi^2\mu \\ \Delta\omega &= \log m\chi \cos\beta' - \tfrac{1}{2} f\mu \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

worauf man durch den Art. 25

$$(44) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos\beta''\sin\alpha'' = \cos\beta' \\ \cos\beta''\cos\alpha'' = \sin\beta'\sin\chi \\ \cos\beta''\sin\Omega'' = \sin\chi \\ \cos\beta''\cos\Omega'' = \cos\beta'\cos\chi \\ \sin\beta'' = \sin\beta'\cos\chi \\ \lambda = \Omega'' - \Delta\omega \end{cases}$$

erhält, welche α'', β'', λ geben.

Der Fall $\alpha' = 270^0$ braucht nicht besonders aufgestellt zu werden, denn es ist klar, dass wenn man in demselben die vorstehenden Ausdrücke unverändert anwendet, das Resultat von dem des Falles $\alpha' = 90^0$ nur darin verschieden ausfällt, dass α'' und λ in entgegen gesetzter Richtung zu zählen sind.

36.

Es ist dienlich die im Vorhergehenden gelöste Aufgabe durch einige Beispiele zu erläutern, und es soll zuerst ein solches gewählt werden, in welchem die geodätische Linie eine beträchtliche Länge hat. Die gegebenen Stücke sollen die folgenden sein:

$$B' = 51^0\,12'$$
$$\alpha' = 119\quad 9\ 18'',20$$
$$s = 2361641{,}92 \text{ Toisen}$$

Wendet man diese Werthe auf die Ausdrücke des Art. 22 an, so bekommt man

$$\beta' = 51^0\,6'\,22'',60\,; \qquad \log\sin\beta' = 9.8911537$$
$$\log\cos\beta' = 9.7978751$$
$$\varphi' = -\,21^0\,27'\,19'',58\,; \qquad \Omega' = -\,35^0\,37'\,54'',31$$
$$\log\sin\beta_0 = 9.9223429\,; \qquad \log\mu = 7.0689261$$
$$\log\cos\beta_0 = 9.7390408\,;$$

Der Bogen β_0 selbst wird nicht gebraucht, und braucht daher nicht aufgeschlagen zu werden. Die Ausdrücke des Art. 23 gaben hierauf

$$\sigma = 41^0\,21'\,12'',898$$
$$\log K' = 7.0705078$$
$$S = 41^0\,26'\,37'',10$$
$$\log B_1 = 2.38336$$
$$\log C_1 = 8.5492$$

und die Gleichungen (22) und (24)

$$x = +\ 2'\ 39'',77\ ;\quad \varphi'' = 19^0\ 56'\ 37'',75$$

worauf sich durch die (25)

$$\Delta\omega = +\ 4'\ 32'',87$$

ergab. Durch die Gleichungen (27) fand sich nun

$$\alpha'' = 62^0\ 30'\ 57'',30\ ;\quad \Omega'' = 33^0\ 29'\ 41'',55$$
$$\log\sin\beta'' = 9.8954835$$
$$\log\cos\beta'' = 9.7910491$$

worauf

$$B'' = 51^0\ 55'\ \ 0'',00$$
$$\lambda = 69\quad 2\ \ 59.99$$

gefunden wurde. Die hier zu Grunde gelegte Polhöhe ist mit Weglassung der Secunden die von Orsk, und das Resultat giebt auch mit Weglassung der Secunden die Polhöhe und die Länge von Valentia. Wie ich die hier als gegeben betrachteten Grössen α' und s erhalten habe wird weiter unten bei der Auflösung der entgegengesetzten Aufgabe gezeigt werden.

37.

Als zweites Beispiel soll eine kurze geodätische Linie angenommen werden. Gegeben seien:

$$B' = 20^0\ ;\quad \alpha' = 30^0\ ;\quad \sigma = 2^0$$

wo ich sogleich den in Bogentheilen ausgedrückten Werth von $\frac{s}{a}$ statt s selbst angenommen habe, weil die Berechnung desselben aus s so einfach ist, und eben so ausgeführt wird wie im vorigen Beispiel. Aus B' bekommt man zuerst

$$\beta' = 19^0\ 56'\ 18'',3135\quad \log\sin\beta' = 9.5327671$$
$$\log\cos\beta' = 9.9731554$$

bei welcher Berechnung ich mich der Reihe des Art. 25 bedient habe. Die Gleichungen des Art. 22 geben nun

$$\varphi' = 67^0\ 16'\ 21'',24\ ;\quad \log\sin\beta_0 = 9.9457887$$
$$\log\cos\beta_0 = 9.6721254$$
$$\log\mu = 7.1157020$$

Der Bogen Ω' wurde hier nicht berechnet, weil es bei kleinen Werthen

von s zweckmässiger ist die Reihenentwickelung des Dreiecks des Art. 27 anzuwenden.

Die Gleichungen des Art. 24 gaben hierauf

$$\log\psi = 3.8586171\,; \qquad \log\chi = 3.8586308{,}8$$
$$\chi = 2^0\,0'\,21'',558\,; \qquad \varDelta\omega = +\,11'',3445$$

Wendet man nun zur weiteren Berechnung die Ausdrücke des Art. 31 an, so findet man

$$\log\theta_0 = 3.5576008{,}8\,; \qquad \log\eta_0 = 3.7961614{,}8$$
$$\log\theta = 3.5575343{,}3\,; \qquad \log\eta = 3.7962058{,}3$$
$$\eta = 1^0\,44'\,14'',690$$
$$\log\tau = 1.738328\,; \qquad \tau = 54{,}743$$
$$\log\omega_0 = 3.5798259\,; \qquad \log\gamma_0 = 3.0744697$$
$$\log\omega = 3.5798211\,; \qquad \log\gamma = 3.0744427$$
$$\omega = 1^0\;3'\,20'',328\,; \qquad \gamma = 19'\,46'',978$$
$$\beta'' = 18\;\;11\;\;53{,}236\,; \qquad \alpha'' = 29^0\,39\;\;18{,}279$$

und hieraus

$$\lambda = 1^0\,3'\,8'',983\,; \qquad B'' = 18^0\,15'\,18'',417$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

38.

Um auch den speciellen Fall des Art. 33 durch ein Beispiel zu erläutern seien gegeben:

$$B' = 59^0\,55'\,; \quad \alpha' = 5^0\,34'\,56'',12\,; \quad \sigma = 21^0\,50'\,33'',91$$

Hiemit wird zuerst

$$\beta' = 59^0\,50'\,0'',189\,; \quad \log\sin\beta' = 9.9367990$$
$$\log\cos\beta' = 9.7011501$$

Die Ausdrücke (33) gaben hierauf

$$\varepsilon' = 4^0\,49'\,48'',333\,; \quad \zeta = 2^0\,48'\,6'',667$$
$$\pi' = 7\;\;5{,}495$$

Ferner die (34)

$$\log\mu = 7.2227682$$

Durch die bez. Ausdrücke des Art. 23 wurde hierauf gefunden

$$\log K' = 7.2244031$$

woraus sich

$$S = 21^0\,52'\,45'',817$$

ergab. Durch die Ausdrücke des Art. 23 erhielt ich ferner

$$\log B_1 = \quad 2.53720\,; \quad \log C_1 = 8.8568$$
$$\log E = -\,0.00036\,; \quad \log E' = 9.7596$$

worauf die Ausdrücke (36) und 37)

$$x = +\,17'',974\,; \quad \varDelta\omega = +\,12'',856$$

gaben. Es wird folglich

$$\chi = 21^0\,52'\,27'',843$$

wodurch alles gegeben ist, welches für die Ausdrücke (38) erforderlich ist. Diese geben hierauf

$$\alpha'' = 3^0\,33'\,27'',42\,; \quad \varepsilon'' = 2^0\,11'\,35'',471$$
$$\pi'' = \quad 3\;\,13,113$$

woraus man

$$\beta'' = 38^0\;\;1'\,24'',728$$
$$\lambda = \;\;2\;\;38\;\;\;0,006$$
$$B'' = 38\;\;\;7\;\;\;0,000$$

erhält, womit die Aufgabe gelöst ist. Die zu Grunde gelegte Polhöhe ist die von Christiania in Norwegen, und die Länge und Polhöhe des Resultats ist die von Palermo, in welchen Bögen jedoch die Secunden weggelassen wurden. Es wird sich weiter unten zeigen, wie die hier als gegeben betrachteten Stücke α' und s' erlangt worden sind.

39.

Von dem speciellen Falle des Art. 34 wird es wohl nicht nöthig sein ein Beispiel zu geben, da er so einfach ist. Dagegen sollen von dem im Art. 35 erörterten Falle zwei Beispiele hier eingeschaltet werden. Sei erstens auf irgend einem Meridiane

$$B' = -\,64^0\,45'\,2'',59$$

die Polhöhe des Punktes, von welchem aus in senkrechter Richtung die geodätische Linie

$$\sigma = 52^0\,28'\,49'',75$$

gezogen, und die Lage des Endpunkts dieser bestimmt werden sollen. Da β' jedenfalls gebraucht wird, so kann man diesen Bogen zuerst berechnen. Man findet

$$\beta' = -\,64^0\,40'\,35'',84\,; \quad \log\sin\beta' = 9.9561242n$$
$$\log\cos\beta' = 9.6311664$$

Man findet nun ferner durch die Gleichung (40)

$$\log \mu = 7{,}1363178$$

und hierauf durch die bez. Ausdrücke des Art. 23

$$\log K' = 7.1379202\ ; \qquad \log B_1 = 2.4507422$$
$$\log C_1 = 8.6839$$
$$\log E = -\ 0.0002975\ ; \quad \log E' = 9.6731$$

worauf

$$S = 52^0\ 35'\ 3'',87$$

wird. Die Gleichung (41) giebt hierauf

$$x = +\ 2'\ 16'',30\ , \quad \text{also} \quad \chi = 52^0\ 32'\ 47'',57$$

und die (42)

$$\varDelta\omega = +\ 4'\ 30'',19$$

Wäre σ ein kleiner Bogen, so würde man sich statt der im Vorhergehenden angezogenen Ausdrücke der (43) bedient haben.

Aus den (44) folgt nun

$$\alpha'' = 149^0\ 12'\ 5'',95\ ; \quad \Omega'' = 71^0\ 55'\ 30'',18$$
$$\log \sin \beta'' = 9.7401112n$$
$$\log \cos \beta'' = 9.9218811$$

und hieraus ohne von β'' Kenntniss zu nehmen

$$B'' = -\ 33^0\ 25'\ 59'',98$$
$$\lambda = \quad 71\ \ 46\ \ 59{,}99$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Sei zweitens:

$$B' = +\ 64^0\ 26'\ 46'',61$$

der Punkt irgend eines Meridians von welchem aus senkrecht die geodätische Linie

$$\sigma = 127^0\ 16'\ 27'',86$$

gezogen werden soll, nach deren Endpunkt gefragt wird. Da die Rechnung genau eben so geführt worden ist, wie im vorigen Beispiel, so darf ich mich begnügen die erhaltenen Stücke ohne weitere Erklärung der Reihe nach anzuführen,

$$\beta' = 64^0\ 22'\ 17'',56\ ; \quad \log \sin \beta' = 9.9550225$$
$$\log \cos \beta' = 9.6360198$$
$$\log \mu = 7.1341203$$
$$\log K' = 7.1357212\ ; \qquad \log B_1 = 2.4485449$$
$$\log C_1 = 8.6795$$

$\log E = -0.0002960$;		$\log E'' = 9.6709$	
$S = 127^0\,31'\,38'',34$;		$x = -\quad 2'\,15'',76$	
$\chi = 127\;\;33\;\;54,10$;		$\varDelta\omega = +\quad 11\;\;3,64$	
$\alpha'' = \;\;31\;\;10\;\;58,58$;		$\Omega'' = 108^0\;\;24\;\;3,64$	
$\lambda = 108\;\;13\;\;0,00$;		$B'' = -33\;\;26\;\;0,00$	

Man sieht sogleich aus den Resultaten dieser beiden Beispiele, dass auch sie vorbereitet sind, denn die Polhöhe der Endpunkte der beiden angenommenen geodätischen Linien ist dieselbe, und die Summe der Längenunterschiede der Endpunkte vom ersten Meridian ist 180⁰. Die Polhöhe — 33⁰26′ ist mit Weglassung der Secunden die von Santiago in Chili, und der Längenunterschied 108⁰13′ ist, ebenfalls mit Weglassung der Secunden, der zwischen Santiago und Moskau. Legt man also auf dem Meridian von Moskau, und zwar auf der Hälfte desselben, von Pol zu Pol gerechnet, wo Moskau liegt, unter der Polhöhe von 64⁰26′46″,61 eine sich nach Westen erstreckende, senkrechte geodätische Linie an, deren Länge in Theilen des Erdäquators 127⁰16′27″,86 beträgt, so liegt der Endpunkt dieser in Santiago, und trifft diesen Punkt unter dem Azimuth 211⁰10′58″,58 von Süden nach Westen gezählt. Legt man dagegen auch auf dem Meridian von Moskau, aber auf der Hälfte desselben, wo Moskau n i c h t liegt, unter der Polhöhe von — 64⁰45′2″,59 eine sich nach Osten erstreckende, senkrechte geodätische Linie an, deren Länge in Theilen des Erdäquators 52⁰28′49″,75 beträgt, so liegt der Endpunkt derselben auch in Santiago, und trifft diesen Punkt unter dem Azimuth 329⁰12′5″,95, welches aber jetzt von Süden nach Osten gezählt werden muss.

Das Verfahren, wodurch diese beiden Beispiele vorbereitet worden sind, wird sich weiter unten bei der Auflösung der entgegengesetzten Aufgabe ergeben.

Zweiter Abschnitt.

40.

Es soll jetzt eine Aufgabe gelöst werden, die in gewisser Beziehung das Entgegengesetzte der im vorigen Abschnitte gelösten bildet, und in der practischen Geodäsie vielfache Anwendung findet. Diese Aufgabe besteht darin: aus der gegebenen geographischen Lage irgend

zweier Punkte auf dem Erdellipsoid die geodätische Linie, die zwischen diesen Punkten statt findet, nebst deren Azimuthen zu finden.

Betrachtet man diese Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit, so kann sie strenge genommen nur auf indirecte Weise gelöst werden, und nur für den Fall, in welchem die zu bestimmende geodätische Linie so klein ist, dass sie als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachtet werden kann, lässt sich eine directe Auflösung durch Reihenentwickelungen herstellen. Ich gebe in diesem Abschnitte nicht nur eine solche, auf kleine Werthe von s beschränkte, sondern auch eine allgemeine Auflösung, die für jeden Werth von s angewandt werden kann, und die Eigenschaft besitzt, dass sie gemeiniglich schon in der ersten Annäherung die gesuchten Grössen auf Hunderttheile der Secunde genau giebt, und daher ein directes Verfahren bildet. Wenn in einzelnen Fällen das Resultat der ersten Annäherung nicht so genau wird, so ist jedenfalls der übrig gebliebene Fehler sehr klein, und kann durch die einfachen Differentialformeln, die ich zugleich angebe, mit aller wünschenswerthen Genauigkeit berichtigt werden*).

Das Mittel, wodurch ich diese Auflösung erlangt habe, besteht in der Einführung der astronomischen Azimuthe als Hülfsgrössen, statt der geodätischen. Es ist bekannt, dass die auf den Dreieckspunkten, oder Stationen, durch Messungen mit dem Theodoliten, oder irgend einem anderen, dazu dienlichen, Instrumente erlangten Winkel nicht die Winkel sind, die die vom Stationspunkt nach den eingestellten Punkten gezogenen geodätischen Linien mit einander bilden, also auch nicht die Azimuthe der geodätischen Linien, wenn der eine eingestellte Punkt im Meridian des Beobachtungsortes liegt. Das Azimuth, welches man durch die Beobachtungen, oder Winkelmessungen, unmittelbar bekommt, und welches ich das astronomische Azimuth nennen will, ist der Winkel, den eine durch die Normale des Beobachtungsortes und den eingestellten Punkt gelegte Ebene mit dem Meridian macht, und von dem Azimuth der geodätischen Linie, welches ich zur Unterscheidung das geodätische Azimuth nennen will, verschieden. Wenn die geodätische Linie kurz ist, dann ist der Unterschied zwischen dem geodätischen und dem

*) Puissant hat in seinem *Traité de Géodésie* diese Aufgabe für sehr kleine Werthe von s gelöst, seine Auflösung ist aber ganz verschieden von der, welche hier gegeben werden wird.



astronomischen Azimuth zwar sehr klein, aber wenn jene Linie lang ist, dann kann er beträchtlich werden. Man wird aus den hier angehängten Beispielen sehen, dass er unter Umständen eine Anzahl von Minuten betragen kann. Man hat zu verschiedenen Zeiten den Versuch gemacht das astronomische Azimuth und den auf dem Ellipsoid in der oben erklärten Ebene liegenden elliptischen Bogen statt des geodätischen Azimuths und der geodätischen Linie in die Geodäsie einzuführen, früher hat es Duséjour gethan, und in neuerer Zeit sind diese Grössen bei der englischen Ordnance Survey angewandt worden, und der Staatsrath Andrae hat darüber Abhandlungen geschrieben. Aber dieses Verfahren kann nicht empfohlen werden, da es abgesehen von anderen Uebelständen zu einer Duplicität in den Dreiecken und ihren Bestandtheilen führt; überdiess werden bei gleichen Graden der Genauigkeit die sich auf die geodätischen Linien und Azimuthe beziehenden Formeln einfacher wie jene.

Denkt man sich ausser dem einen Pole des Ellipsoids irgend zwei auf demselben liegende Punkte A und B, sieht man die Polhöhe von A, das astronomische Azimuth von B im Punkte A, und den elliptischen Bogen zwischen A und B als gegeben an, und berechnet hieraus den Winkel in B, so ist dieser weder das astronomische noch das geodätische Azimuth von A in B, sondern ein anderer Winkel. Sieht man umgekehrt das astronomische Azimuth von A in B als gegeben an, so bekommt man in A einen Winkel, welcher weder das astronomische noch das geodätische Azimuth von B in A ist. Auch die elliptischen Bögen zwischen A und B, von welchen der eine dem astronomischen Azimuth in A, und der andere dem in B entspricht, sind von einander verschieden. Betrachtet man ein allgemeines Dreieck auf dem Ellipsoid, von welchem keine Ecke in einem der beiden Pole liegt, so vervielfältigt sich diese Dupplicität. Man wird also bei der Einführung der astronomischen Azimuthe statt der geodätischen in die Geodäsie auf Zweideutigkeiten gerathen, während durch die Anwendung des geodätischen Azimuths und der geodätischen Linie diese durchaus nicht stattfinden. Die Anwendung der letzteren ist auch schon dadurch wissenschaftlich geboten, dass sich die sphäroidische Trigonometrie an die sphärische und die ebene vollständig anschliesst, in welchen die Seiten der Figuren, die man betrachtet, auch kürzeste Linien auf der Kugel und der Ebene sind. Bei grösseren Dreiecken treten die genannten Uebelstände selbstver-

ständlich mehr hervor wie bei kleinen*), aber auch bei diesen verhält es sich je nach der Lage derselben auf dem Ellipsoid anders. Es kommt hiebei auf den Werth der Azimuthe an, und wenn bei einer kleinen geodätischen, gegebenen Linie in einem gewissen Falle die durch Hülfe der astronomischen Azimuthe geführte Rechnung von der mit geodätischen geführten im Resultat nur sehr wenig abweicht, so lässt sich daraus nicht schliessen, dass dieses in jedem Falle bei Zugrundelegung einer geodätischen Linie derselben Länge statt finden wird. Die astronomischen Azimuthe fallen nemlich bei 0, 180°, und nahe 90°, 270° mit den geodätischen zusammen, und die grössten Unterschiede finden ceteris paribus in den Octanten statt. Ein Beispiel daher mit kleinem Azimuth auf beide Arten berechnet, muss grössere Uebereinstimmung zeigen, wie der Fall sein würde, wenn das Azimuth einem Octanten nahe gleich wäre.

Es werden in diesem Abschnitte, wie schon oben erwähnt die astronomischen Azimuthe, die man durch endliche Ausdrücke berechnen kann, nur als Hülfsgrössen angewandt, und vor dem Ende der Rechnung in die geodätischen umgewandelt.

Unter den Nebenaufgaben die in diesem Abschnitt gelöst werden nenne ich hier die: Von einem gegebenen Punkt der Erdoberfläche aus eine geodätische Linie so auf einen gegebenen Meridian zu ziehen, dass sie diesen rechtwinklich schneidet. Auch diese Aufgabe wird unbeschränkt so gelöst, dass in der Regel die erste Annäherung schon ein genaues Resultat giebt. Schliesslich mache ich darauf aufmerksam, dass man durch die Verbindung der hier behandelten Aufgabe mit der des vorhergehenden Abschnittes eine Anzahl von Aufgaben der sphäroidischen Trigonometrie lösen kann, und führe den Fall aus, wo in einem allgemeinen sphäroidischen Dreieck zwei Seiten mit dem zwischen liegenden Winkel, nebst der Lage desselben auf dem Ellipsoid gegeben sind.

41.

Wir wollen jetzt als Vorbereitung zur Auflösung unserer Aufgabe die astronomischen Azimuthe einer besondern Betrachtung unterwerfen,

---

*) Man wird aus den dieser Abhandlung hinzugefügten Beispielen sehen, dass für die geodätische Linie zwischen Orsk und Valentia die Unterschiede zwischen den geodätischen und den astronomischen Azimuthen auf 11″ steigen, und dass sie für die geodätische Linie zwischen Moskau und Santiago sogar auf $10\frac{1}{2}$ Minuten gehen.



und die Relationen ableiten, in welchen sie zu anderen, bekannten oder unbekannten, Grössen stehen.

Um diese Relationen zu erhalten wollen wir zuerst durch die Normale irgend eines Punkts (A) auf dem Erdellipsoid eine Ebene legen, die zugleich durch irgend einen anderen Punkt (B) derselben Oberfläche geht. Man kann den Punkt (A) als Beobachtungsort, und den Punkt (B) als einen in dem, im Punkt (A) aufgestellten, Winkelmessinstrument eingestellten Dreieckspunkt betrachten. Bezeichnet man die Polhöhe des Punkts (A) mit B', und legt von den rechtwinklichen Coordinaten x, y, z die Ebene der Achsen der xz, von welchen die der x im Aequator, und die der z wieder in der Umdrehungsachse des Erdellipsoids liegen soll, durch den Meridian von (A), so sind die Gleichungen der Normale am Punkt (A)

$$x \sin\beta' - z\sqrt{1-e^2}\,.\cos\beta' = ae^2 \sin\beta' \cos\beta'$$
$$y = 0$$

wenn wieder β' die zur Polhöhe B' gehörige reducirte Breite bedeutet.

Die reducirte Breite des Punkts (B) sei β'', und λ dessen Längenunterschied vom Punkt (A), dann sind die Coordinaten von (B)

$$x = a\cos\beta''\cos\lambda\,; \quad y = a\cos\beta''\sin\lambda\,; \quad z = a\sqrt{1-e^2}\,.\sin\beta''$$

Stellt man nun die Gleichung der Ebene, die sowohl den eben aufgestellten Gleichungen der Normale, wie den letztgenannten Coordinaten gnügt, unter der Form

$$Ax + By + Cz = D$$

auf, und berücksichtigt zuerst die Gleichungen der Normale, so wird

$$A = E\sin\beta'$$
$$C = E\sqrt{1-e^2}\,.\cos\beta'$$
$$D = Eae^2\sin\beta'\cos\beta'$$

wo E ein willkührlicher Factor ist. Substituirt man hierauf sowohl diese Werthe wie die Ausdrücke der Coordinaten des Punkts (B), so ergiebt sich die Gleichung

$$B\cos\beta''\sin\lambda$$
$$= E\{(1-e^2)\cos\beta'\sin\beta'' - \sin\beta'\cos\beta''\cos\lambda + e^2\sin\beta'\cos\beta'\}$$

und bestimmt man jetzt E so, dass die Coefficienten A, B, C, D von Nennern befreit werden, durch welche Bedingung man $E = \cos\beta''\sin\lambda$ erhält, so werden

$$A = \sin\beta' \cos\beta'' \sin\lambda$$
$$B = (1-e^2)\cos\beta' \sin\beta'' - \sin\beta' \cos\beta'' \cos\lambda + e^2 \sin\beta' \cos\beta'$$
$$C = -\sqrt{1-e^2}\,.\,\cos\beta' \cos\beta'' \sin\lambda$$
$$D = ae^2 \sin\beta' \cos\beta' \cos\beta'' \sin\lambda$$

die, wenn sie in die Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz = D$$

substituirt werden, diese völlig bestimmen.

42.

Die beiden Ebenen der Meridiane von (*A*) und (*B*) nebst der dritten, eben bestimmten Ebene bilden einen körperlichen Winkel, und legt man darüber eine Kugeloberfläche von beliebigem Halbmesser, die ihren Mittelpunkt im Scheitel des körperlichen Winkels hat, so bekommt man ein sphärisches Dreieck, in welchem der Winkel zwischen den beiden Kreisbögen, oder Dreieckseiten, die die beiden Meridiane darstellen, λ, der Winkel zwischen dem Meridian von (*A*) und der dritten Ebene, oder den Dreieckseiten, die diese darstellen, $180^0 - \alpha_0'$, wenn α_0' das astronomische Azimuth des Punkts (*B*) von (*A*) aus bedeutet, und die zwischen diesen beiden Winkeln liegende Seite $90^0 - B'$ sind. Der dritte Winkel dieses Dreiecks soll mit γ' und die beiden anderen Seiten sollen mit χ_0 und $90^0 - \Gamma$ bezeichnet werden, dergestalt, dass den Winkeln

$$\lambda\,,\quad 180^0 - \alpha_0'\,,\quad \gamma \quad \text{bez. die Seiten}$$
$$\chi_0\,,\quad 90^0 - \Gamma\,,\quad 90^0 - B'$$

gegenüber liegen. Die sphärische Trigonometrie giebt daher

$$(45)\quad \begin{cases} \sin\chi_0 \sin\alpha_0' = \cos\Gamma \sin\lambda \\ \sin\chi_0 \cos\alpha_0' = -\cos B' \sin\Gamma + \sin B' \cos\Gamma \cos\lambda \\ \sin\chi_0 \sin\gamma = \cos B' \sin\lambda \\ \sin\chi_0 \cos\gamma = \sin B' \cos\Gamma - \cos B' \sin\Gamma \cos\lambda \\ \cos\chi_0 = \sin B' \sin\Gamma + \cos B' \cos\Gamma \cos\lambda \end{cases}$$

für welche noch der Ausdruck für Γ zu ermitteln ist. In Bezug darauf ist zu bemerken, dass die Seite $90^0 - \Gamma$ in der Ebene des Meridians von (*B*) liegt, und dem Winkel gleich ist, den die Durchschnittslinie zwischen der Ebene dieses Meridians und der dritten, im vor. Art. be-

stimmten, Ebene mit der Achse der z macht. Man findet leicht, dass die Gleichung der Ebene dieses Meridians

$$x \sin \lambda - y \cos \lambda = 0$$

ist, und diese nebst der Gleichung

$$Ax + By + Cz = D$$

sind also die Gleichungen der eben genannten Durchschnittslinie, die man leicht auf die folgende Form bringen kann,

$$x (A \cos \lambda + B \sin \lambda) + zC \cos \lambda = D \cos \lambda$$
$$y (A \cos \lambda + B \sin \lambda) + zC \sin \lambda = D \sin \lambda$$

Die analytische Geometrie zeigt aber, dass wenn

$$ax + bz = k$$
$$ay + cz = l$$

die Gleichungen irgend einer Graden sind, die mit der Achse der z den Winkel θ macht, man

$$\cos \theta = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

hat. Die Substitution der vorstehenden Gleichungen giebt daher

$$\sin \Gamma = \frac{A \cos \lambda + B \sin \lambda}{\sqrt{(A \cos \lambda + B \sin \lambda)^2 + C^2}}$$

oder durch Hülfe der Ausdrücke von A, B, C, des vor. Art.

$$\sin \Gamma = \frac{1}{p}\left(\sqrt{1-e^2}\,.\sin \beta' + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \sin \beta'\right) \quad . \quad . \quad (46)$$

wenn zur Abkürzung

$$p^2 = \cos^2 \beta'' + \left(\sqrt{1-e^2}\,.\sin \beta' + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \sin \beta'\right)^2 \quad . \quad (47)$$

gesetzt wird. Es folgt hieraus

$$\cos \Gamma = \frac{1}{p} \cos \beta'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

$$\operatorname{tg} \Gamma = \left(\sqrt{1-e^2} + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\sin \beta'}{\sin \beta''}\right) \operatorname{tg} \beta'' \quad . \quad . \quad (49)$$

Aus den Gleichungen (45) verbunden mit der (49) lässt sich nun α_0', γ, χ_0 berechnen, wenn β', β'', λ gegeben sind. Das im Art. 27 betrachtete Dreieck giebt ausserdem

$$\left.\begin{aligned}
\sin \chi \sin \alpha' &= \cos \beta'' \sin \omega \\
\sin \chi \cos \alpha' &= -\cos \beta' \sin \beta'' + \sin \beta' \cos \beta'' \cos \omega \\
\sin \chi \sin \alpha'' &= \cos \beta' \sin \omega \\
\sin \chi \cos \alpha'' &= \sin \beta' \cos \beta'' - \cos \beta' \sin \beta'' \cos \omega \\
\cos \chi &= \sin \beta' \sin \beta'' + \cos \beta' \cos \beta'' \cos \omega
\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

die den (45) vollkommen ähnlich sind. Verbindet man nun die (50) mit den vorhergehenden Gleichungen, so kann man die Unterschiede $\alpha'-\alpha_0'$, $\alpha''-\gamma$, $\chi-\chi_0$ ermitteln.

Ich bemerke hiezu, dass die Gleichungen (45) in Verbindung mit den (46), (47), (48) zu erkennen geben, dass der Winkel γ nicht das astronomische Azimuth des Punkts (A) vom Punkt (B) aus ist. Denn hiefür müssten die Gleichungen (45) für α_0' in die für γ übergehen, wenn man darin β' und β'' mit einander vertauscht, und dass dieses nicht der Fall ist, lehrt der Augenschein. Ebenso bekommt die Seite χ_0 verschiedene Werthe, je nachdem man sie aus den unveränderten (45), oder aus denselben nach der Vertauschung von β' und β'' mit einander berechnet. Das hier betrachtete Dreieck, von welchem zwei Seiten Meridianbögen sind, bekommt also verschiedene Seiten und Winkel, je nachdem man von dem astronomischen Azimuth am einen oder anderen Eckpunkt ausgeht; nur der Winkel λ bleibt in diesen beiden Fällen derselbe. Wenn nun in einem auf dem Erdellipsoid betrachteten Dreieck keine Seite mit einem Meridian zusammen fällt, so müssen in diesem alle Seiten und Winkel verschieden ausfallen, je nachdem man das eine oder das andere astronomische Azimuth an dessen Eckpunkten zu Grunde legt.

43.

Durch Hülfe der eben entwickelten Gleichungen kann man die Unterschiede $\alpha_0'-\alpha'$, $\gamma-\alpha''$, $\chi_0-\chi$ in unendliche Reihen entwickeln, die nach den graden und positiven Potenzen von e fortschreiten. Sei zu dem Ende

$$B' = \beta' + c\,; \quad \Gamma = \beta'' + f\,; \quad \lambda = \omega - \Delta\omega$$

dann wird zuerst

$$\sin B' = \sin\beta' + c\cos\beta' - \tfrac{1}{2}c^2\sin\beta' + \ldots$$

$$\cos B' = \cos\beta' - c\sin\beta' - \tfrac{1}{2}c^2\cos\beta' + \ldots$$

$$\sin\Gamma = \sin\beta'' + f\cos\beta'' - \tfrac{1}{2}f^2\sin\beta'' + \ldots$$

$$\cos\Gamma = \cos\beta'' - f\sin\beta'' - \tfrac{1}{2}f^2\cos\beta'' + \ldots$$

$$\sin\lambda = \sin\omega - \Delta\omega\cos\omega - \tfrac{1}{2}\Delta\omega^2\sin\omega + \ldots$$

$$\cos\lambda = \cos\omega + \Delta\omega\sin\omega - \tfrac{1}{2}\Delta\omega^2\cos\omega + \ldots$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die beiden ersten (45), und bleibt

bei den ersten Potenzen von c, f, $\Delta\omega$ stehen, welches für unsern Zweck ausreicht, so bekommt man mit Zuziehung der (50)

$$\begin{aligned}\sin\chi_0\sin\alpha_0' &= \sin\chi\sin\alpha' - f\sin\beta''\sin\omega - \Delta\omega\cos\beta''\cos\omega\\ \sin\chi_0\cos\alpha_0' &= \sin\chi\cos\alpha' + c\cos\chi - f(\cos\beta'\cos\beta'' + \sin\beta'\sin\beta''\cos\omega)\\ &\quad + \Delta\omega\sin\beta'\cos\beta''\sin\omega\end{aligned}$$

und multiplicirt man die erste dieser mit $\cos\alpha'$, die zweite mit $-\sin\alpha'$, und addirt, so ergiebt sich leicht, wenn man erwägt, dass das Dreieck des Art. 27 auch

$$\begin{aligned}\sin\alpha''\sin\beta'' &= -\cos\alpha'\sin\omega + \sin\alpha'\cos\omega\sin\beta'\\ \cos\alpha'' &= \cos\alpha'\cos\omega + \sin\alpha'\sin\omega\sin\beta'\end{aligned}$$

giebt, und dass man jetzt $\sin\chi$ statt $\sin\chi_0$, und $\alpha_0'-\alpha'$ statt $\sin(\alpha_0'-\alpha')$ setzen darf,

$$\alpha_0' - \alpha' = -c\sin\alpha'\frac{\cos\chi}{\sin\chi} + f\frac{\sin\alpha''}{\sin\chi} - \Delta\omega\frac{\cos\beta''\cos\alpha''}{\sin\chi}$$

Die Anwendung desselben Verfahrens auf die dritte und vierte der (45), oder die blose Vertauschung von c mit f, β' und α' mit β'' und α'', α_0' und α' mit $180^0-\gamma$ und $180^0-\alpha''$ in der vorstehenden Gleichung giebt ausserdem

$$\gamma - \alpha'' = -c\frac{\sin\alpha'}{\sin\chi} + f\sin\alpha''\frac{\cos\chi}{\sin\chi} - \Delta\omega\frac{\cos\beta'\cos\alpha'}{\sin\chi}$$

Substituirt man ferner die obigen Ausdrücke in die letzte (45), so ergiebt sich durch Hülfe der (50)

$$\cos\chi_0 = \cos\chi - c\sin\chi\cos\alpha' + f\sin\chi\cos\alpha'' + \Delta\omega\sin\chi\cos\beta'\sin\alpha'$$

oder da man hier $\cos\chi_0 - \cos\chi = (\chi-\chi_0)\sin\chi$ setzen darf,

$$\chi - \chi_0 = -c\cos\alpha' + f\cos\alpha'' + \Delta\omega\cos\beta'\sin\alpha'$$

wo nur noch die Ausdrücke für c, f, $\Delta\omega$ zu substituiren sind.

44.

Wenn man die mit e^4 multiplicirten Glieder mit aufnimmt, so bekommt man leicht aus der Reihe für B des Art. 25, und der Gleichung $B' = \beta' + c$,

$$c = \tfrac{1}{2}e^2\sin\beta'\cos\beta' + \tfrac{1}{8}e^4(\sin\beta'\cos\beta' + 2\sin\beta'\cos^3\beta')$$

Um den Ausdruck für f zu erhalten giebt die (49)

$$\mathrm{tg}(\beta''+f) = \left(\sqrt{1-e^2} + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''}\right)\mathrm{tg}\,\beta''$$

und setzt man

$$i = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''}$$

so bekommt man hieraus auf ähnliche Weise wie im Art. 28

$$(51) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tg} f = \frac{i\sin\beta''\cos\beta''}{1+i\sin^2\beta''}$$

und nach der Entwickelung

$$f = i\sin\beta''\cos\beta'' - i^2\sin^3\beta''\cos\beta''$$

oder nach der Substitution des Werthes von i,

$$f = e^2\left(\sin\beta' - \frac{1}{2}\sin\beta''\right)\cos\beta''$$
$$+ e^4\left\{\sin\beta'\sin\beta''(\sin\beta'' - \sin\beta') + \frac{1}{2}\sin\beta' - \frac{1}{8}\sin\beta'' - \frac{1}{4}\sin^3\beta''\right\}\cos\beta''$$

Endlich geben die Gleichungen (15) und (20) nach der Substitution der Werthe der in der letzteren eingeführten Hülfsgrössen,

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}e^2\chi\cos\beta'\sin\alpha'$$
$$+ \frac{1}{16}e^4\{\chi\cos\beta'\sin\alpha' + \chi\cos^3\beta'\sin^3\alpha'$$
$$-(\sin^2\beta' - \cos^2\beta'\cos^2\alpha')\cos\beta'\sin\alpha'\sin\chi\cos\chi + 2\sin\beta'\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha'\sin^2\chi\}$$

Substituirt man diese Ausdrücke von c, f, $\Delta\omega$ in die des vor. Art., und nimmt dabei nur auf die mit e^2 multiplicirten Glieder Rücksicht, so ergiebt sich nach einer leichten Reduction

$$(52)\begin{cases} \alpha_0' = \alpha' + \frac{1}{2}e^2\cos\beta'\sin\alpha'\left\{\cos\beta'\cos\alpha'\left(1 - \frac{\chi}{\operatorname{tg}\chi}\right) + \sin\beta'\left(2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi - \chi\right)\right\} \\ \gamma = \alpha'' - \frac{1}{2}e^2\cos\beta'\sin\alpha'\left\{\cos\beta'\cos\alpha'\left(\frac{\chi}{\sin\chi} - \cos\chi\right) + 2\sin\beta'\frac{\sin^2\frac{1}{2}\chi}{\cos\frac{1}{2}\chi}\right\} \\ \chi_0 = \chi - \frac{1}{2}e^2\left\{\sin\chi\cos\chi + \cos^2\beta'\sin^2\alpha'(\chi - \sin\chi\cos\chi)\right. \\ \qquad\qquad \left. + 4\sin\beta'\cos\beta''\cos\alpha''\sin^2\frac{1}{2}\chi\right\} \end{cases}$$

Diese Ausdrücke gelten für jeden beliebigen Werth von χ, sieht man aber χ als eine kleine Grösse erster Ordnung an, und entwickelt bis auf Grössen sechster Ordnung, so vereinfachen sie sich und gehen über in

$$(53)\begin{cases} \alpha_0' = \alpha' + \frac{1}{6}e^2\chi^2\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha' + \frac{1}{24}e^2\chi^3\sin\beta'\cos\beta'\sin\alpha' \\ \gamma = \alpha'' - \frac{1}{3}e^2\chi^2\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha' - \frac{1}{8}e^2\chi^3\sin\beta'\cos\beta'\sin\alpha' \end{cases}$$
$$\chi_0 = \chi - \frac{1}{2}e^2\chi - \frac{1}{2}e^2\chi^2\sin\beta'\cos\beta''\cos\alpha'' + \frac{1}{3}e^2\chi^3(1 - \cos^2\beta'\sin^2\alpha')$$

45.

Die beiden für α_0' und γ eben erhaltenen Ausdrücke sind für unseren Zweck hinreichend genau, aber mit dem für χ_0 verhält es sich nicht so, da in demselben das mit $e^4\chi$ multiplicirte Glied fünfter Ordnung noch fehlt. Dieses soll jetzt entwickelt werden.

Setzt man die vollständigen Ausdrücke des Art. 43 für $\sin B'$, $\cos B'$, etc. in die letzte Gleichung (45), so ergiebt sich

$$\begin{aligned}(\chi-\chi_0)\sin\tfrac{1}{2}(\chi+\chi_0) = & -c\sin\chi\cos\alpha'+f\sin\chi\cos\alpha''+\Delta\omega\sin\chi\cos\beta'\sin\alpha' \\ & -\tfrac{1}{2}(c^2+f^2)\cos\chi+cf\{\sin\alpha'\sin\alpha''+\cos\alpha'\cos\alpha''\cos\chi\} \\ & -c\Delta\omega\sin\chi\sin\beta'\sin\alpha'-f\Delta\omega\sin\chi\sin\beta''\sin\alpha'' \\ & -\tfrac{1}{2}\Delta\omega^2\{\cos\chi-\sin\beta'\sin\beta''\}\end{aligned}$$

indem das Dreieck des Art. 27 auch

$$\begin{aligned}&\cos\beta'\cos\beta''+\sin\beta'\sin\beta''\cos\omega = \\ &\sin\alpha'\sin\alpha''+\cos\alpha'\cos\alpha''\cos\chi\end{aligned}$$

giebt. Es ist ferner $\frac{1}{2}(\chi+\chi_0)=\chi-\frac{1}{2}(\chi-\chi_0)$, und daher

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\chi+\chi_0)} &= \frac{1}{\sin\chi}+\frac{\cos\chi}{2\sin^2\chi}(\chi-\chi_0) \\ &= \frac{1}{\sin\chi}-\frac{1}{2}c\frac{\cos\chi}{\sin^2\chi}\cos\alpha'+\frac{1}{2}f\frac{\cos\chi}{\sin^2\chi}\cos\alpha''+\frac{1}{2}\Delta\omega\frac{\cos\chi}{\sin^2\chi}\cos\beta'\sin\alpha'\end{aligned}$$

Multiplicirt man daher die vorstehende Gleichung Seite für Seite mit dieser, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned}\chi-\chi_0 = & -c\cos\alpha'+f\cos\alpha''+\Delta\omega\cos\beta'\sin\alpha' \\ & -\tfrac{1}{2}c^2\frac{\cos\chi}{\sin\chi}\sin^2\alpha'+\frac{cf}{\sin\chi}\sin\alpha'\sin\alpha''-\frac{c\Delta\omega}{\sin\chi}\cos\beta''\cos\alpha''\sin\alpha' \\ & -\tfrac{1}{2}f^2\frac{\cos\chi}{\sin\chi}\sin^2\alpha''+\frac{f\Delta\omega}{\sin\chi}\cos\beta'\cos\alpha'\sin\alpha''-\frac{\Delta\omega^2}{2\sin\chi}\cos\beta'\cos\alpha'\cos\beta''\cos\alpha''\end{aligned}\right\}\quad(54)$$

Mit Uebergehung der höheren Potenzen von χ erhält man aus der letzten Gleichung (28)

$$\sin\beta'' = \sin\beta'-\chi\cos\beta'\cos\alpha'-\tfrac{1}{2}\chi^2\sin\beta'$$

eliminirt man hiemit $\sin\beta''$ und $\sin^3\beta''$ aus dem Ausdruck für f des vor. Art., und bleibt in den mit e^4 multiplicirten Gliedern bei der ersten Potenz von χ stehen, so erhält man

$$f = \frac{1}{2} e^2 \left\{ \sin\beta' + \chi\cos\beta'\cos\alpha' + \frac{1}{2}\chi^2\sin\beta' \right\} \cos\beta''$$
$$+ \frac{1}{8} e^4 \{3\sin\beta' - 2\sin^3\beta' + \chi\cos\beta'\cos\alpha' - 2\chi\sin^2\beta'\cos\beta'\cos\alpha'\}\cos\beta''$$

Der Ausdruck für $\varDelta\omega$ giebt, wenn χ^2 übergangen wird,

$$\varDelta\omega = \frac{1}{2} e^2\chi\cos\beta'\sin\alpha' + \frac{1}{8} e^4\chi\cos^3\beta'\sin\alpha'$$

Der Ausdruck von c bleibt unverändert

$$c = \frac{1}{2} e^2 \sin\beta'\cos\beta' + \frac{1}{8} e^4 (\sin\beta'\cos\beta' + 2\sin\beta'\cos^3\beta')$$

Aus diesen Ausdrücken ergiebt sich

$$c^2 = \frac{1}{4} e^4 \sin^2\beta'\cos^2\beta'$$

$$cf = \frac{1}{4} e^4 \left\{ \sin^2\beta'\cos\beta' + \chi\sin\beta'\cos^2\beta'\cos\alpha' + \frac{1}{2}\chi^2\sin^2\beta'\cos\beta' \right\} \cos\beta''$$

$$c\varDelta\omega = \frac{1}{4} e^2\chi\sin\beta'\cos^2\beta'\sin\alpha'$$

$$f^2 = \frac{1}{4} e^4 \{\sin^2\beta' + 2\chi\sin\beta'\cos\beta'\cos\alpha' + \chi^2\sin^2\beta' + \chi^2\cos^2\beta'\cos^2\alpha'\}\cos^2\beta''$$

$$f\varDelta\omega = \frac{1}{4} e^4 \{\chi\sin\beta'\cos\beta'\sin\alpha' + \chi^2\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha'\}\cos\beta''$$

$$\varDelta\omega^2 = \frac{1}{4} e^4 \chi^2 \cos^2\beta'\sin^2\alpha'$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck für $\chi - \chi_0$, und nimmt dabei nur auf die mit e^4 multiplicirten Glieder Rücksicht, so erhält man

$$\frac{1}{8} e^4 \Big\{ -(\sin\beta'\cos\beta' + 2\sin\beta'\cos^3\beta')\cos\alpha'$$
$$+ (3\sin\beta' - 2\sin^3\beta' + \chi\cos\beta'\cos\alpha' - 2\chi\sin^2\beta'\cos\beta'\cos\alpha')\cos\beta''\cos\alpha''$$
$$+ \chi\cos^4\beta'\sin^2\alpha'$$
$$- \frac{1-\frac{1}{3}\chi^2}{\chi}\sin^2\beta'\cos^2\beta'\sin^2\alpha'$$
$$+ 2\frac{1+\frac{1}{6}\chi^2}{\chi}(\sin^2\beta'\cos\beta'\sin\alpha' + \chi\sin\beta'\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha'$$
$$+ \frac{1}{2}\chi^2\sin^2\beta'\cos\beta'\sin\alpha')\cos\beta''\sin\alpha''$$
$$- 2\sin\beta'\cos^2\beta'\sin^2\alpha'\cos\beta''\cos\alpha''$$
$$- \frac{1-\frac{1}{3}\chi^2}{\chi}(\sin^2\beta' + 2\chi\sin\beta'\cos\beta'\cos\alpha' + \chi^2\sin^2\beta'$$
$$+ \chi^2\cos^2\beta'\cos^2\alpha')\cos^2\beta''\sin^2\alpha''$$
$$+ 2(\sin\beta'\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha' + \chi\cos^3\beta'\sin\alpha'\cos^2\alpha')\cos\beta''\sin\alpha''$$
$$- \chi\cos^3\beta'\sin^2\alpha'\cos\alpha'\cos\beta''\cos\alpha'' \Big\}$$

Eliminirt man hierauf β'' und α'' durch die Gleichungen

$$\cos\beta''\sin\alpha'' = \cos\beta'\sin\alpha'$$
$$\cos\beta''\cos\alpha'' = \cos\beta'\cos\alpha' + \chi\sin\beta'$$

so zieht er sich in $\frac{1}{8}e^4\chi$ zusammen. Es wird daher bis auf Grössen sechster Ordnung vollständig

$$\chi_0 = \chi - \frac{1}{2}e^2\left(1+\frac{1}{4}e^2\right)\chi - \frac{1}{2}e^2\chi^2\sin\beta'\cos\beta''\cos\alpha'' + \frac{1}{3}e^2\chi^3(1-\cos^2\beta'\sin^2\alpha')$$

Man kann hieraus leicht den Ausdruck von χ durch χ_0 erhalten, zu welchem Ende blos $\chi = \chi_0 + \frac{1}{2}e^2\chi_0$ zu substituiren ist. Hiemit wird

$$\chi = \chi_0 + \frac{1}{2}e^2\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\chi_0 + \frac{1}{2}e^2\chi_0^2\sin\beta'\cos\beta''\cos\alpha'' - \frac{1}{3}e^2\chi_0^3(1-\cos^2\beta'\sin^2\alpha') \qquad (55)$$

die uns weiter unten nützlich sein wird.

46.

Um das gegenwärtige Thema vollständig auszuführen ist noch erforderlich, dass der Ausdruck des in der Ebene von χ_0 liegenden Bogens auf dem Ellipsoid ermittelt werde, der die Endpunkte (A) und (B) hat, die mit den Endpunkten der im Vorhergehenden betrachteten geodätischen Linie identificirt werden sollen; dieses soll jetzt vorgenommen werden.

Nehmen wir die im Art. 41 eingeführte Ebene vor, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz = D$$

ist. Die Elimination von B' und Γ durch die Gleichungen

$$\sin B' = \frac{\sin\beta'}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}}\ ; \quad \cos B' = \frac{\cos\beta'\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}}$$

nebst den (46) und (48) verwandelt die beiden ersten (45) in

$$p\sin\chi_0\sin\alpha_0' = \cos\beta''\sin\lambda$$
$$p\sin\chi_0\cos\alpha_0' = \frac{-(1-e^2)\cos\beta'\sin\beta'' + \sin\beta'\cos\beta''\cos\lambda - e^2\sin\beta'\cos\beta'}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}}$$

hiemit gehen die Ausdrücke von A, B, etc. des Art. 41 in die folgenden über,

$$A = \quad p \sin\chi_0 \sin\alpha_0' \sin\beta'$$
$$B = -p \sin\chi_0 \cos\alpha_0' \sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}$$
$$C = -p \sin\chi_0 \sin\alpha_0' \sqrt{1-e^2}\,.\cos\beta'$$
$$D = \quad p \sin\chi_0 \sin\alpha_0'\,.\,ae^2 \sin\beta' \cos\beta'$$

und die Gleichung der Ebene wird

$$x \sin\beta' \sin\alpha_0' - y\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}\,.\cos\alpha_0' - z\sqrt{1-e^2}\,.\cos\beta'\sin\alpha_0' = ae^2\sin\beta'\cos\beta'\sin\alpha_0'$$

Dreht man hierauf die Achsen der x und y um den Winkel $\mathit{\Lambda}$ in entgegengesetzter Richtung der wachsenden Längen, und nennt die neuen Coordinaten x' und y', so wird

$$x = \quad x'\cos\mathit{\Lambda} + y'\sin\mathit{\Lambda}$$
$$y = -x'\sin\mathit{\Lambda} + y'\cos\mathit{\Lambda}$$

und setzt man zugleich

$$z = z' - ae^2\frac{\sin\beta'}{\sqrt{1-e^2}}$$

und substituirt diese Ausdrücke in die Gleichung der Ebene, so geht diese über in

$$x'(\cos\mathit{\Lambda}\sin\beta'\sin\alpha_0' + \sin\mathit{\Lambda}\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}\,.\cos\alpha_0')$$
$$+ y'(\sin\mathit{\Lambda}\sin\beta'\sin\alpha_0' - \cos\mathit{\Lambda}\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}\,.\cos\alpha_0')$$
$$- z'\sqrt{1-e^2}\,.\cos\beta'\sin\alpha_0' = 0$$

woraus hervorgeht, dass der Anfangspunkt der Coordinaten jetzt in unserer Ebene liegt, während er immer noch in der Umdrehungsachse des Ellipsoids liegen bleibt. Er liegt jetzt im Scheitel des oben erklärten körperlichen Winkels. Setzt man hierauf in dieser Gleichung den Coefficienten von y', nemlich

$$\sin\mathit{\Lambda}\sin\beta'\sin\alpha_0' - \cos\mathit{\Lambda}\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}\,.\cos\alpha_0' = 0$$

so wird bewirkt, dass unsere Ebene senkrecht auf der Ebene der $x'z'$ steht. Es folgt hieraus

(56) . . . . $\operatorname{tg}\mathit{\Lambda} = \frac{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}}{\sin\beta'}\operatorname{cotg}\alpha_0'$

und die Gleichung der Ebene wird

(57) . . . . $z' = x'\operatorname{tg} U$

wenn ausserdem

(58) . . . . . $\operatorname{tg} U = \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\cos\mathit{\Lambda}\sqrt{1-e^2}}$

gesetzt wird. Die Ebene der $x'z'$ ist nun die Meridianebene des Ellipsoids, welche von unserer eingelegten Ebene rechtwinklich geschnitten wird, und die Lage dieser Meridianebene wird durch die Bögen Λ und U bestimmt. Es ergiebt sich leicht, dass ihr Längenunterschied von der Meridianebene des Punkts (A) rückwärts gezählt Λ ist, und dass ihre Durchschnittslinie mit derselben Ebene mit der Ebene des Aequators den Winkel U bildet.

47.

Die Einführung der Coordinaten x', y', z' in die Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

des Ellipsoids giebt

$$(x'^2+y'^2)(1-e^2)+z'^2-2z'ae^2\frac{\sin\beta'}{\sqrt{1-e^2}}+a^2e^4\frac{\sin^2\beta'}{1-e^2}-a^2(1-e^2) = 0$$

Führt man hierauf die Substitution

$$x' = \xi\cos U - \zeta\sin U$$
$$z' = \xi\sin U + \zeta\cos U$$

in die Gleichung (57) der Ebene ein, so erhält man $\zeta=0$, woraus hervorgeht, dass die Coordinaten ξ und y in dieser Ebene liegen. Setzt man daher

$$x' = \xi\cos U\,; \quad y' = \eta\,; \quad z' = \xi\sin U$$

in die Gleichung des Ellipsoids, so wird

$$\xi^2(1-e^2\cos^2 U)+\eta^2(1-e^2)-2\xi ae^2\frac{\sin U\sin\beta'}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$-a^2\frac{1-2e^2+e^4\cos^2\beta'}{1-e^2} = 0$$

die Gleichung der Ellipse, unter welcher unsere eingelegte Ebene das Ellipsoid schneidet. Man kann auf bekannte Weise diese Ellipse auf ihre Achsen hinführen, aber da dieses für den hier zu verfolgenden Zweck überflüssig ist, so unterlasse ich es, und führe blos an, dass die grosse Achse dieser Ellipse immer in der Richtung der η, die kleine Achse hingegen in der Richtung der ξ liegt. Ihre Excentricität ist ferner immer kleiner, oder wenigstens nie grösser, wie die des Ellipsoids.

48.

Es soll nun der Bogen der eben erhaltenen Ellipse bestimmt werden, welcher sich auf dem Ellipsoid von dem Punkt (A) bis zum Punkt (B) erstreckt, und zu dem Ende führe ich die Polarcoordinaten r und θ durch die folgenden Gleichungen ein,

$$\xi = r\cos\theta$$
$$\eta = r\sin\theta$$

Setzt man zur Abkürzung ausserdem

$$A = 1 - e^2\cos^2 U$$
$$B = 1 - e^2$$
$$C = ae^2\frac{\sin\beta'\sin U}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$D = a^2\frac{1-2e^2+e^4\cos^2\beta'}{1-e^2}$$

so bekommt man für die Gleichung der Ellipse

$$r^2(B+(A-B)\cos^2\theta) - 2rC\cos\theta - D = 0$$

Da nun die Differentialrechnung für jede ebene, stetige Linie, wenn S irgend einen unbestimmten Bogen derselben bezeichnet,

$$dS = d\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

und die Gleichung unserer Ellipse

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{(rA\cos\theta - C) - rB\cos\theta}{(rA\cos\theta - C)\cos\theta + rB\sin^2\theta}r\sin\theta$$

giebt, so bekommt irgend ein unbestimmter Bogen der letzteren den Ausdruck

$$S = \int r d\theta\frac{\sqrt{(rA\cos\theta - C)^2 + r^2B^2\sin^2\theta}}{(rA\cos\theta - C)\cos\theta + rB\sin^2\theta}$$

Die Gleichung der Ellipse giebt

$$r = \frac{K + C\cos\theta}{B + (A-B)\cos^2\theta}$$

wenn

$$K = \sqrt{BD + \{(A-B)D + C^2\}\cos^2\theta}$$

gesetzt wird. Man findet hieraus

$$rA\cos\theta - C = \frac{AK\cos\theta - BC\sin^2\theta}{B + (A-B)\cos^2\theta}$$
$$rB\sin\theta = \frac{BK\sin\theta + BC\sin\theta\cos\theta}{B + (A-B)\cos^2\theta}$$
$$K = (rA\cos\theta - C)\cos\theta + rB\sin^2\theta$$

hiemit, und da identisch

$$A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta = \{B + (A-B)\cos^2\theta\}^2 + (A-B)^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

ist, lässt sich der obige Ausdruck für S leicht auf die folgende Form bringen,

$$S = \int r\,d\theta \sqrt{1 + \frac{(K(A-B)\cos\theta - BC)^2\sin^2\theta}{K^2(B + (A-B)\cos^2\theta)^2}}$$

welche zur Anwendung geeigneter ist wie jene. Um die Integration auszuführen muss das Differential, wie man es auch umformen möchte, in eine unendliche Reihe aufgelöst werden, da die Rectification der Ellipse zu den unauflösbaren Aufgaben gehört. In der Reihenentwickelung des vorstehenden Ausdrucks reicht es aus, bei den Gliedern vierter Ordnung stehen zu bleiben, und hiedurch kürzt er sich schon wesentlich ab. Die obigen Ausdrücke für A, B, etc. zeigen, dass $A-B$ und C Grössen der zweiten Ordnung sind, und es ist daher die Grösse unter dem Wurzelzeichen im obigen Integral von der Eins nur um eine Grösse der vierten Ordnung verschieden. Berücksichtigt man diesen Umstand, so wird sogleich, bis auf Grössen sechster Ordnung genau,

$$S = \int d\theta \frac{K + C\cos\theta}{B + (A-B)\cos^2\theta} + \frac{1}{2a}\int d\theta (K(A-B)\cos\theta - BC)^2\sin^2\theta$$

49.

Die obigen Ausdrücke der Coefficienten geben

$$\begin{aligned} BD &= a^2(1 - 2e^2 + e^4\cos^2\beta') \\ (A-B)D + C^2 &= a^2(e^2 - e^4\cos^2\beta')\sin^2 U \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} K = a\Big\{&1 - e^2 + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 U\cos^2\theta \\ &- \tfrac{1}{2}e^4\sin^2\beta' + \tfrac{1}{2}e^4\sin^2\beta'\sin^2 U\cos^2\theta - \tfrac{1}{8}e^4\sin^4 U\cos^4\theta\Big\} \end{aligned}$$

sich ergiebt. Ferner wird

$$\begin{aligned} C\cos\theta &= a\left(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4\right)\sin\beta'\sin U\cos\theta \\ B + (A-B)\cos^2\theta &= 1 - e^2 + e^2\sin^2 U\cos^2\theta \\ (K(A-B)\cos\theta - BC)^2\sin^2\theta &= a^2e^4\{\sin^2\beta'\sin^2 U - 2\sin\beta'\sin^3 U\cos\theta \\ &\quad + (\sin^4 U - 2\sin^2\beta'\sin^2 U)\cos^2\theta \\ &\quad + 2\sin\beta'\sin^3 U\cos^3\theta - \sin^4 U\cos^4\theta\} \end{aligned}$$

und hieraus bekommt man leicht

$$S = a\int d\theta \Big\{1 - \tfrac{1}{2}e^4\sin^2\beta'\cos^2 U + e^2\Big[1 + \tfrac{3}{2}e^2 - e^2\sin^2 U\Big]\sin\beta'\sin U\cos\theta$$
$$- \tfrac{1}{2}e^2(1 + e^2\cos^2 U)\sin^2 U\cos^2\theta - \tfrac{1}{8}e^4\sin^4 U\cos^4\theta\Big\}$$

und nach der Ausführung der Integration

$$S = a\Big\{\Big[1 - \Big(\tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4}e^4\Big)\sin^2 U - \tfrac{1}{2}e^4\sin^2\beta'\cos^2 U + \tfrac{13}{64}e^4\sin^4 U\Big]\theta$$
$$+ e^2\Big(1 + \tfrac{3}{2}e^2 - e^2\sin^2 U\Big)\sin\beta'\sin U\sin\theta$$
$$- \tfrac{1}{8}e^2\Big(1 + e^2 - \tfrac{3}{4}e^2\sin^2 U\Big)\sin^2 U\sin 2\theta - \tfrac{1}{256}e^4\sin^4 U\sin 4\theta\Big\}$$
$$+ \text{const.}$$

in welchem Ausdruck noch die Grenzen zu berücksichtigen sind.

50.

Um die Grenzen zu bestimmen, innerhalb welcher in unserer Aufgabe das vorstehende Integral genommen werden muss, bemerke ich, dass die Gleichungen (56) und (58), welche $\mathit{\Delta}$ und U bestimmen, auf die folgende Form gebracht werden können,

$$\operatorname{tg}\mathit{\Delta} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha_0'}{\sin B'}\,;\quad \operatorname{tg} U = \frac{\operatorname{tg} B'}{\cos\mathit{\Delta}}$$

Hieraus giebt sich zu erkennen, dass $90^0 - B'$ die Hypotenuse, und $90^0 - U$ die eine Cathete, so wie α_0' und $\mathit{\Delta}$ die beiden nicht rechtwinklichen Winkel eines rechtwinklichen, sphärischen Dreiecks sind, in welchem $\mathit{\Delta}$ von den beiden genannten Seiten eingeschlossen ist. Es ist nun leicht einzusehen, dass die unbestimmt verlängerte zweite Cathete dieses Dreiecks den Bogen θ bildet, und dass die Ebene, in welcher dieser liegt, auf der Oberfläche des Ellipsoids durch die beiden Punkte (A) und (B) geht, die den Anfangs- und den Endpunkt sowohl der jetzt betrachteten ebenen krummen Linie wie der im Vorhergehenden betrachteten geodätischen Linie bilden. Bezeichnet man für den Punkt (A) diese Cathete mit θ', dann ist ihre Verlängerung bis zum Punkte (B) dem oben eingeführten Bogen χ_0 gleich, gleichwie oben der Unterschied zwischen φ'' und φ' dem Bogen χ gleich war. Das Integral des vor. Art. muss daher

$$\text{von } \theta = \theta' \text{ bis } \theta = \theta' + \chi_0$$

genommen werden, und hiemit wird es

$$S = a\left\{\left[1 - \frac{1}{4}e^2(1+e^2)\sin^2 U - \frac{1}{2}e^4\sin^2\beta'\cos^2 U + \frac{13}{64}e^4\sin^4 U\right]\chi_0\right.$$
$$+ 2e^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2 - e^2\sin^2 U\right)\sin\beta'\sin U\cos\left(\theta' + \frac{1}{2}\chi_0\right)\sin\frac{1}{2}\chi_0$$
$$- \frac{1}{4}e^2\left(1 + e^2 - \frac{3}{4}e^2\sin^2 U\right)\sin^2 U\cos(2\theta' + \chi_0)\sin\chi_0$$
$$\left. - \frac{1}{128}e^4\sin^4 U\cos(4\theta' + 2\chi_0)\sin 2\chi_0\right\}$$

Zur Bestimmung von U und θ' giebt das oben erklärte Dreieck, ausser den schon angeführten Relationen,

$$\sin U \sin\theta' = \cos B' \cos\alpha_0'$$
$$\sin U \cos\theta' = \sin B'$$
$$\cos U = \cos B' \sin\alpha_0'$$

womit der gesuchte elliptische Bogen bis auf Grössen sechster Ordnung vollständig bestimmt ist.

51.

Die vorhergehenden Entwickelungen fassen die Auflösung unserer zweiten geodätischen Hauptaufgabe in sich, nemlich:

»Wenn die astronomische Lage zweier Punkte auf dem Erdellip- »soid gegeben ist, die geodätische Linie zu finden, die diese Punkte »mit einander verbindet, so wie die Azimuthe der letzteren an diesen »beiden Endpunkten.«

Wenn die geodätische Linie kurz ist, so ist die Auflösung, die das Vorhergehende giebt, direct, aber wenn die geodätische Linie lang ist, so wird sie strenge genommen indirect, die erste Annäherung giebt jedoch schon ein so genaues Resultat, dass kaum eine Verbesserung übrig bleibt, und wenn sie nöthig wird so klein ist, dass sie durch einfache Differentialformeln ausgeführt werden kann, und daher die Durchführung einer zweiten Annäherung überflüssig wird.

52.

Die gegebenen Stücke sind hier B', B'', λ, und die erste Arbeit besteht darin, dass man entweder durch die strenge allgemeine Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} B\sqrt{1-e^2}$$

oder durch die Reihenentwickelungen derselben, die im Art. 25 eingeführt

wurden, die reducirten Breiten β' und β'' rechnet. Hierauf sind durch die Gleichungen (49) Γ, und die (45) α_0', γ, χ_0 zu berechnen, die aber zu diesem Zweck zusammen gezogen, und auf einfachere Formen hingeführt werden können. Durch ein, dem im Art. 27 angewandten, ganz ähnliches Verfahren vermeidet man die besondere Berechnung von Γ, und kommt auf die folgenden Ausdrücke

$$(59)\quad \left\{ \begin{aligned} p \cos n \sin m &= \sqrt{1-e^2}\,.\sin\beta'' + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta' \\ p \cos n \cos m &= \cos\beta'' \cos\lambda \\ p \sin n &= \cos\beta'' \sin\lambda \\ \cos n \sin q &= \frac{1}{p}\left\{\sqrt{1-e^2}\,.\sin\beta'' + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta'\right\}\sin\lambda \\ \cos n \cos q &= \cos\lambda \end{aligned} \right.$$

Nachdem hiedurch m, n, q berechnet worden sind, wobei die Controlle statt findet, dass die beiden Werthe von $\cos n$, die aus den drei ersten, und den beiden letzten hervorgehen, mit einander übereinstimmen müssen, erhält man

$$(60)\quad . \; . \quad \left\{ \begin{aligned} \sin\chi_0 \sin\alpha_0' &= \sin n \\ \sin\chi_0 \cos\alpha_0' &= \cos n \sin(B'-m) \\ \sin\chi_0 \sin(\gamma+q) &= \sin n \cos(B'-m) \\ \sin\chi_0 \cos(\gamma+q) &= \sin(B'-m) \\ \cos\chi_0 &= \cos n \cos(B'-m) \end{aligned} \right.$$

welche α_0', γ, χ_0 geben, und bei deren Anwendung ausser einer der vorhin genannten, ähnlichen Controlle, auch die statt findet, dass die erhaltenen numerischen Werthe für $\cos\chi_0$ und $\sin\chi_0$ einem und demselben Bogen angehören müssen.

Setzt man nun den Fall, dass s klein ist, so geben die Gleichungen (53) und (55), nemlich

$$(61)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha' &= \alpha_0' - \frac{e^2}{6r}\chi_0^2\cos^2\beta'\sin\alpha_0'\cos\alpha_0' - \frac{e^2}{24r^2}\chi_0^3\sin\beta'\cos\beta'\sin\alpha_0' \\ \alpha'' &= \gamma + \frac{e^2}{8r}\chi_0^2\cos^2\beta'\sin\alpha_0'\cos\alpha_0' + \frac{e^2}{8r^2}\chi_0^3\sin\beta'\cos\beta'\sin\alpha_0' \\ \chi &= \chi_0 + \frac{1}{2}e^2\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\chi_0 + \frac{e^2}{2r}\chi_0^2\sin\beta'\cos\beta''\cos\gamma \\ &\qquad - \frac{e^2}{3r^2}\chi_0^3(1-\cos^2\beta'\sin^2\alpha_0' \end{aligned} \right.$$

mit aller wünschenswerthen Genauigkeit α', α'', χ, worauf die (17), nachdem β_0, μ, φ' berechnet worden sind, s giebt. Hiemit ist also in

dem Falle, wo s klein ist, eine directe Auflösung unserer Aufgabe erlangt, wie oben angekündigt wurde. Die Gleichung (17) wird weiter unten auf die zur Anwendung geeigneteste Form gebracht werden. Die Logarithmen der Constanten der vorstehenden Ausdrücke sind

$$\log \sqrt{1-e^2} = 9.9985458\,, \qquad \log \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} = 7.8258646-10$$

$$\log \frac{e^2}{6r} = 1.73183-10\,, \qquad \log \frac{e^2}{24r^3} = 5.8154\ -20$$

$$\log \frac{e^2}{8r} = 2.03286-10\,, \qquad \log \frac{e^2}{8r^3} = 6.2925\ -20$$

$$\log \tfrac{1}{2} e^2\left(1+\tfrac{3}{4}e^2\right) = 7.52555-10\,, \qquad \log \frac{e^2}{2r} = 2.20895-10$$

$$\log \frac{e^2}{8r^3} = 6.7185-20$$

und setzen voraus, dass in allen Gliedern der Ausdrücke (61) χ_0 in Secunden ausgedrückt substituirt werde.

53.

Da die im vor. Art. vorgetragene Auflösung unserer Aufgabe sich nur auf kleine Werthe von s erstreckt, und in Folge dessen mehrere Bögen der Gleichungen (59) und (60) auch klein werden, so kann man statt der strengen Formeln wieder eine Reihenentwickelung anwenden, die jetzt abgeleitet werden soll.

Durch Zuziehung der Gleichungen (46), (47) (48) geben die (59)

$$\operatorname{tg} m = \frac{\operatorname{tg}(\beta''+f)}{\cos\lambda}$$

$$\sin n = \cos(\beta''+f)\sin\lambda$$

$$\operatorname{tg} q = \sin(\beta''+f)\operatorname{tg}\lambda$$

wo wieder $\Gamma = \beta'' + f$ gesetzt worden ist. Setzt man ferner

$$K = \tfrac{1}{2}(\alpha_0' + \gamma + q)\ ; \quad L = \tfrac{1}{2}(\alpha_0' - \gamma - q)$$

so bekommt man aus den (60)

$$\operatorname{tg} K = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}n}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}N}$$

$$\operatorname{tg} L = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}n\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}N$$

wenn überdies $N = B' - m$ gesetzt wird.

Sei wieder

$$i = \sqrt{1-e^2} - 1 + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''} \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

wo i in Secunden auszudrücken ist, und daher

$$\sqrt{1-e^2}-1 = -689'',4962\ ;\quad \log\frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} = 3,1402897$$

wird. Die Gleichung (51) giebt hierauf

$$(63)\quad \ldots\quad \log f = \log . i \sin\beta'' \cos\beta'' - \nu i \sin^2\beta''$$
$$\log\nu = 4.32336$$

womit f gegeben ist. Die Gleichungen für n, q, m können ebenso behandelt werden wie die des Art. 28 für θ, η, τ. Denn verwandelt man, nachdem $m = \beta'' + f + g$ gesetzt worden ist,

$$\theta,\quad \eta,\quad \alpha',\quad \chi,\quad \tau$$
bez. in $n,\quad q,\quad 90^0 - \beta'' - f,\quad \lambda,\quad g$

so werden die ursprünglichen Gleichungen des Art. 28 mit den obigen identisch. Die Ausdrücke des Art. 31 geben daher sogleich

$$(64)\quad \begin{cases} q_0 = \lambda \sin(\beta'' + f) \\ n_0 = \lambda \cos(\beta'' + f) \\ \log q = \log q_0 + 4\mu n_0^2 + 112\mu' n_0^4 - 96\mu' n_0^2 q_0^2 \\ \log n = \log n_0 - 2\mu q_0^2 - 8\mu' q_0^4 - 96\mu' n_0^2 q_0^2 \\ \log g = \log \varrho' n q + \mu q^2 + \mu n^2 + 7\mu' q^4 - 30\mu' q^2 n^2 + 7\mu' n^4 \end{cases}$$

wo ϱ, μ, μ' dieselben Werthe haben wie im Art. 31. Hierauf wird

$$N = B' - \beta'' - f - g$$

Die übrigen Bögen müssen auf andere Art entwickelt werden. Setzt man

$$(65)\quad \ldots\ldots\quad \begin{cases} h = \mu n^2 + 7\mu' n^4 \\ H = \mu N^2 + 7\mu' N^4 \end{cases}$$

so erhält man

$$\log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} n = \log \tfrac{1}{2} n + h$$

$$\log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} N = \log \tfrac{1}{2} N + H$$

und hierauf

$$(66)\quad \begin{cases} \log \operatorname{tg} K = \log \frac{n}{N} + h - H \\ \log L = \log \frac{1}{2} \varrho' n N + h + H - 30\mu n^2 N^2 \end{cases}$$

worauf sich

$$(67)\quad \ldots\quad \alpha_0' = K + L\,,\quad \gamma = K - L - q$$

ergiebt. Zur Entwickelung von χ_0 giebt die letzte (60) zuerst

$$\chi_0^2 - \frac{1}{12}\chi_0^4 + \frac{1}{360}\chi_0^6$$
$$= n^2 + N^2 - \frac{1}{12}n^4 - \frac{1}{2}n^2N^2 - \frac{1}{12}N^4 + \frac{1}{360}n^6 + \frac{1}{24}n^4N^2 + \frac{1}{24}n^2N^4 + \frac{1}{360}N^6$$

woraus mit hinreichender Annäherung

$$\chi_0^4 = n^4 + 2n^2N^2 + N^4 - \frac{2}{3}n^4N^2 - \frac{2}{3}n^2N^4$$
$$\chi_0^6 = n^6 + 3n^4N^2 + 3n^2N^4 + N^6$$

hervorgehen. Es wird daher

$$\chi_0^2 = n^2 + N^2 - \frac{1}{3}n^2N^2 - \frac{1}{45}n^4N^2 - \frac{1}{45}n^2N^4$$

Sei nun

$$\left.\begin{aligned} t \sin T &= n \\ t \cos T &= N \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

wodurch

$$\chi_0^2 = t^2 - \frac{1}{3}t^4 \sin^2 T \cos^2 T - \frac{1}{45}t^6 \sin^2 T \cos^2 T$$

wird, so bekommt man leicht

$$\log \chi_0 = \log t - 2\mu\frac{n^2N^2}{t^2} - 16\mu' n^2N^2 - \mu''\left(2\mu\frac{n^2N^2}{t^2}\right)^2 \quad . \quad (69)$$

wo

$$\log \mu'' = \log 10\frac{\mu'}{\mu^2} = 0,3622$$

ist, und μ und μ' wieder dieselben sind wie im Art. 31. Hiemit ist die Entwickelung ausgeführt. Es darf nicht befremden, dass hier K durch den Quotienten zweier kleinen Zahlen bestimmt wird, da mit der Natur der Aufgabe unzertrennlich verbunden ist, dass wenn s klein ist, eine kleine Aenderung in B' oder B'' eine grosse Aenderung der Azimuthe nach sich zieht, wenn nicht etwa diese auch klein, oder nahe gleich 180° sind. In diesem Falle giebt der Ausdruck für K diesen Bogen mit derselben Genauigkeit, mit welcher die anderen Bögen erhalten werden, wenn aber diese Bedingung hinsichtlich der Azimuthe nicht statt findet, so muss man, um K eben so genau zu erhalten wie die übrigen Bögen, dafür Logarithmen von einer grösseren Anzahl von Decimalen anwenden.

54.

Wenn s beliebig ist, so muss das eben gegebene Verfahren eine Aenderung erleiden, weil dann nicht angenommen werden kann, dass die Gleichungen (52), und viel weniger die (53) oder (61) genaue Werthe

der Unterschiede $\alpha'-\alpha_0'$, $\alpha''-\gamma$, $\chi-\chi_0$ geben. Man rechne jetzt aus den Gleichungen

$$(70)\quad \begin{cases} p\cos n \sin m = \sqrt{1-e^2}\,.\sin\beta'' + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta' \\ p\cos n\cos m = \cos\beta''\cos\lambda \\ p\sin n = \cos\beta''\sin\lambda \end{cases}$$

m und n, und dann aus den folgenden

$$(71)\ \ldots \begin{cases} \sin\chi_0\sin\alpha_0' = \sin n \\ \sin\chi_0\cos\alpha_0' = \cos n\sin(B'-m) \\ \cos\chi_0 = \cos n\cos(B'-m) \end{cases}$$

α_0' und χ_0. Die Bögen q und γ, so wie p, werden nicht gebraucht, und brauchen daher nicht berechnet zu werden, will man aber p einestheils aus den vorstehenden Gleichungen mit berechnen, und anderntheils aus der (47), die zu diesem Zweck wie folgt gestellt werden kann,

$$(72)\ .\quad p = \sqrt{1-e^2\sin^2\beta'' + 2e^2\sin\beta'\sin\beta'' + \frac{e^4}{1-e^2}\sin^2\beta'}$$

so bekommt man eine Controlle der Rechnung mehr. Ich wiederhole hier

$$\log\sqrt{1-e^2} = 9.9985458\ ,\quad \log\frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} = 7.8258646$$

55.

Hierauf sind durch die Ausdrücke (52) genäherte Werthe von α' und χ zu berechnen, die ich um auszudrücken, dass sie nicht die genauen Werthe sind, mit (α') und (χ) bezeichnen werde. Ohne den Grad der Genauigkeit zu verletzen können diese Gleichungen wie folgt geschrieben werden,

$$(73)\begin{cases} (\alpha') = \alpha_0' - \frac{1}{2}re^2\cos\beta'\sin\alpha_0'\left\{\cos\beta'\cos\alpha_0'\left(1-\frac{\chi_0}{r\,\mathrm{tg}\,\chi_0}\right)+\sin\beta'\left(2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\chi_0-\frac{\chi_0}{r}\right)\right\} \\ (\chi) = \chi_0 + \frac{1}{2}re^2\left\{\sin\chi_0\cos\chi_0 + \cos^2\beta'\sin^2\alpha_0'\left(\frac{\chi_0}{r}-\sin\chi_0\cos\chi_0\right)\right. \\ \qquad\left. + 4\sin^2\beta'\sin\chi_0\sin^2\frac{1}{2}\chi_0 + 4\sin\beta'\cos\beta'\cos\alpha_0'\cos\chi_0\sin^2\frac{1}{2}\chi_0\right\} \end{cases}$$

wo wieder $r = 206265''$ ist. Der Logarithmus der Constante ist hier

$$\log\frac{1}{2}re^2 = 2.83781$$

56.

Durch Hülfe der eben erhaltenen Werthe von (α') und (χ) kann man nun genäherte Werthe von φ', β_0, μ, $\Delta\omega$ berechnen, die ich wieder, um anzudeuten, dass sie nicht genau sind, mit den in Klammern eingeschlossenen Buchstaben bezeichnen werde. Dem Vorhergehenden zufolge erhält man jetzt

$$\left.\begin{aligned} \sin(\beta_0)\sin(\varphi') &= \cos\beta'\cos(\alpha') \\ \sin(\beta_0)\cos(\varphi') &= \sin\beta' \\ \cos(\beta_0) &= \cos\beta'\sin(\alpha') \\ \log(\mu) &= \log(b\sin^2(\beta_0)) - c\sin^2(\beta_0) + c'\sin^4(\beta_0) - c''\sin^6(\beta_0) \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

wo wie im Art. 22

$$\log b = 7.2252588-10$$

$$\log c = 7.164073-10\,;\quad \log c' = 4.6002-10\,;\quad \log c'' = 2.198-10$$

und darauf der Gleichung (25) analog

$$(\Delta\omega) = mE(\chi)\cos(\beta_0) - E'\cos(\beta_0)\cos(2(\varphi') + (\chi))\sin(\chi) \qquad (75)$$

*) Man erkennt leicht, dass der Fehler in $(\Delta\omega)$ weit kleiner sein muss wie der in (α'). Um Alles beisammen zu haben führe ich auch hier aus dem Art. 23 die Ausdrücke der Coefficienten an

$$\log E = -\varepsilon(\mu) - \zeta(\mu)^2$$

$$\log E' = \log\eta(\mu)$$

$$\log m = 7.5241068-10\,;\quad \log\varepsilon = 9.3367543-10$$

$$\log\zeta = 9.2118-10\,;\quad \log\eta = 2.53678$$

Hierauf bekommt man

$$(\omega) = \lambda + (\Delta\omega)$$

und es werden genauere Werthe von α', α'', χ durch Anwendung der Gleichungen (50) erlangt, in welche (ω) statt ω zu setzen ist.

57.

Durch nochmalige Anwendung einer, der im Art. 27 ausgeführten, analogen Transformation, verändert man die genannten Gleichungen in die folgenden. Nachdem aus

*) Ich habe hier E und E' statt (E) und (E') gesetzt, weil die Werthe dieser Grössen sogleich so genau erhalten werden, dass eine Verbesserung derselben überflüssig wird.

$$\cos n' \sin m' = \sin \beta''$$
$$\cos n' \cos m' = \cos \beta'' \cos (\omega)$$
$$\cos n' \sin q' = \sin \beta'' \sin (\omega)$$
$$\cos n' \cos q' = \cos (\omega)$$
$$\sin n' = \cos \beta'' \sin (\omega)$$

die Bögen m', q', n' berechnet worden sind, geben die folgenden

$$\sin \chi \sin \alpha' = \sin n'$$
$$\sin \chi \cos \alpha' = \cos n' \sin (\beta' - m')$$
$$\sin \chi \sin (\alpha'' + q') = \sin n' \cos (\beta' - m')$$
$$\sin \chi \cos (\alpha'' + q') = \sin (\beta' - m')$$
$$\cos \chi = \cos n' \cos (\beta' - m')$$

die Bögen α', α'', χ, und zwar sind die Werthe dieser, die hieraus hervorgehen, schon sehr genau, und können überhaupt nur in Folge der Anwendung von (ω) statt ω mit einem Fehler behaftet sein. Da dieser jedenfalls sehr klein ist, so kann er durch die Anwendung von einfachen Differentialformeln berichtigt werden.

58.

Setzt man

$$\delta\alpha' = \alpha' - (\alpha') \; ; \quad \delta\chi = \chi - (\chi) \; ; \quad \text{etc.}$$

so geben die Gleichungen des vorvor. Art.

$$\delta\beta_0 = -\sin (\varphi')\, \delta\alpha' \; ; \quad \delta\varphi' = -\frac{\cos (\varphi')}{\operatorname{tg} (\beta_0)}\, \delta\alpha'$$

Die Gleichung

$$\mu = \frac{1}{4} \varepsilon \sin^2 \beta_0 \mp \ldots$$

des Art. 17 giebt ferner hinreichend genau

$$\delta \log \mu = \frac{2M}{r} \operatorname{cotg} (\beta_0)\, \delta\beta_0$$

wo M den Modul der Briggischen Logarithmen bezeichnet, und daher

$$\log \frac{2M}{r} = 4{,}6244 - 10$$

ist, wenn $\delta\beta_0$ in Secunden ausgedrückt wird. Die Gleichung

$$E = 1 - \frac{1}{2} \mu + \ldots .$$

giebt ausserdem

$$\delta E = -\tfrac{1}{4} e^2 \sin(\beta_0) \cos(\beta_0) \delta\beta_0$$

die aber nicht beachtet zu werden braucht, da sie von einer höheren Ordnung ist wie die übrigen Gleichungen*). Die Gleichung für $(\varDelta\omega)$ giebt nach diesem

$$\delta\varDelta\omega = \frac{(\varDelta\omega)}{(\chi)}\delta\chi - \frac{(\varDelta\omega)}{r}\operatorname{tg}(\beta_0)\delta\beta_0$$

und sollte der hieraus hervorgehende Werth von $\delta\varDelta\omega$ merklich sein, so werden die Verbesserungen der durch die Gleichungen des vor. Art. erhaltenen Werthe von χ, α', α'' die folgenden

$$\varDelta\chi = \cos\beta'' \sin\alpha'' \delta\varDelta\omega$$

$$\varDelta\alpha' = \frac{\cos\beta'' \cos\alpha''}{\sin\chi}\delta\varDelta\omega$$

$$\varDelta\alpha'' = \frac{\cos\beta' \cos\alpha'}{\sin\chi}\delta\varDelta\omega$$

worauf man die genauen Werthe

$$\chi + \varDelta\chi\,;\quad \alpha' + \varDelta\alpha'\,;\quad \alpha'' + \varDelta\alpha''$$

erhält. Die Werthe von $\delta\varphi'$ und $\delta.\log\mu$ werden zwar hier nicht gebraucht, aber sie finden ihre Anwendung bei der Berechnung von s aus χ, φ', μ.

59.

Es ist hier noch eine besondere Klasse von Fällen zu betrachten. Das Verfahren des Art. 52 u. f. kann nur bei sehr kleinen Werthen von s angewandt werden, indem die Ausdrücke (61) bei wachsendem s bald aufhören die Hunderttheile von Secunden richtig zu geben. Wenn daher s etwa 2° übersteigt, so verfährt man sicherer, wenn man sich des Verfahrens des Art. 54 u. f. bedient. Wenn aber s die eben beiläufig bezeichnete Grenze nicht viel übersteigt, so kann man sich statt der strengen Formeln des Art. 57 einer Reihenentwickelung derselben bedienen, die der des Art. 53 vollkommen analog ist, und ohne Weiteres durch Veränderung der Bezeichnungen aus dieser erhalten wird. Da jetzt $f=0$, und β' für B', n' für n, u. s. w. zu setzen ist, so führt die Reihenentwickelung der Formeln des Art. 57 auf die folgenden zu berechnenden Ausdrücke:

---

*) S. die Anmerkung zu Art. 56.

$$q_0' = (\omega)\sin\beta''$$
$$n_0' = (\omega)\cos\beta''$$
$$\log q' = \log q_0' + 4\mu n_0'^2 + 112\mu' n_0'^4 - 96\mu' n_0'^2 q_0'^2$$
$$\log n' = \log n_0' - 2\mu q_0'^2 - 8\mu' q_0'^4 - 96\mu' n_0'^2 q_0'^2$$
$$\log g' = \log \varrho' n' q' + \mu q'^2 + \mu n'^2 + 7\mu' q'^4 - 30\mu' q'^2 n'^2 + 7\mu' n'^4$$

worauf

$$N' = \beta' - \beta'' - g$$

wird. Ferner

$$h' = \mu n'^2 + 7\mu' n'^4$$
$$H' = \mu N'^2 + 7\mu' N'^4$$
$$\log \operatorname{tg} K' = \log \frac{n'}{N'} + h' - H'$$
$$\log L' = \log \tfrac{1}{2}\varrho' n' N' + h' + H' - 30\mu' n'^2 N'^2$$

worauf sich

$$\alpha' = K' + L' \;;\quad \alpha'' = K' - L' - q'$$

ergiebt. Ferner

$$t' \sin T' = n'$$
$$t' \cos T' = N'$$

worauf man

$$\log \chi = -2\mu \frac{n'^2 N'^2}{t'^2} - 16\mu' n'^2 N'^2 - \mu'' \left(2\mu \frac{n'^2 N'^2}{t'^2}\right)^2$$

wo

$$\log \mu'' = 0.3622$$

erhält, und die Entwickelung ausgeführt ist. Die Bemerkungen die der Entwickelung im Art. 53 hinzugefügt wurden, haben hier dieselbe Geltung. Um einer Verwechselung vorzubeugen führe ich hier wieder an, dass ϱ', μ, μ' dieselben sind wie im Art. 31.

60.

Betrachten wir jetzt den Fall des Art. 33 in Bezug auf die gegenwärtige Aufgabe, nemlich den Fall, wo bei einem grossen Werthe von s die Azimuthe klein, oder nahe gleich 180° sind. Bei den jetzt gegebenen Stücken wird sich dieser Fall dadurch zu erkennen geben, dass λ klein, und die Polhöhen sehr von einander verschieden sind. Obgleich jetzt wieder die Methode des Art. 54 u. f. unverändert angewandt werden könnte, so ist doch die besondere Betrachtung dieses Falles von Interesse, weil in demselben Reihenentwickelungen angewandt werden können, die von den vorhergehenden etwas verschieden sind. Da hier

λ ein kleiner Bogen ist, so haben zwar die betreffenden Reihen des Art. 53 für q, n, g wieder Geltung, aber da q jetzt nicht weiter gebraucht wird wie zur Berechnung von g, so kann man die Gleichung für q weglassen, und im Ausdruck für g statt q die Hülfsgrösse q_0 einführen. Lässt man überdies die Glieder sechster Ordnung weg, die hier nie Merkliches geben können, so werden diese Formeln einfach, und die anzuwendenden Ausdrücke werden die folgenden,

$$\log f = \log . i \sin \beta'' \cos \beta'' - \nu i \sin^2 \beta''$$

wo i und ν dieselben sind wie im Art. 53. Ferner

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= \lambda \sin (\beta'' + f) \\ n_0 &= \lambda \cos (\beta'' + f) \\ \log n &= \log n_0 - 2\mu q_0^2 - 8\mu' q_0^4 - 96\mu' n_0^2 q_0^2 \\ \log g &= \log \varrho' n q_0 + \mu q_0^2 + 5\mu n^2 \\ N &= B' - \beta'' - f - g \end{aligned}\right\} \quad . \quad (76)$$

Die Entwickelung der Gleichungen (60) wird jetzt anders wie vorher, da N nicht mehr klein ist. Diese Gleichungen geben

$$\operatorname{tg} \alpha_0' = \frac{\operatorname{tg} n}{\sin N}; \quad \operatorname{tg} \chi_0 = \frac{\operatorname{tg} N}{\cos \alpha_0'}$$

Setzt man nun $\chi_0 = N + u$, und verwandelt man in den Gleichungen des Art. 29

$$\begin{matrix} \omega, & \theta, & \beta' - \eta, & v & \text{bez. in} \\ \alpha_0', & n, & 90^0 - N, & u & \end{matrix}$$

so werden zwei derselben mit den vorstehenden identisch. Man bekommt daher

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{n}{\sin N} \\ b_0 &= \frac{n}{\operatorname{tg} N} \\ \log \alpha_0' &= \log a_0 - 4\mu b_0^2 + 112\mu' a_0^4 + 96\mu' a_0^2 b_0^2 \\ \log u &= \log \varrho' n b_0 - \mu \alpha_0'^2 - 2\mu b_0^2 \\ \chi_0 &= N + u \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

61.

Nachdem nun α_0' und χ_0 berechnet worden sind, müssen wieder aus den Ausdrücken (73) (α') und (χ) berechnet werden, worauf die Gleichungen des Art. 56 zur Berechnung von (φ'), (β_0), (μ), $(\varDelta\omega)$ verwandt werden können. Statt dieser ist es aber angemessen, die betref-

fenden Reihenentwickelungen des Art. 33 zu gebrauchen, von welchen die für $\log \varepsilon'$ jetzt ausgeschlossen werden kann. Schliesst man wieder die Unbekannten in Klammern ein, um anzudeuten, dass sie nicht die genauen Werthe sind, so ist zu berechnen,

$$(78)\quad \begin{cases} \varepsilon_0' = (\alpha') \sin \beta' \\ \zeta_0 = (\alpha') \cos \beta' \\ \log (\zeta) = \log \zeta_0 - 2\mu \varepsilon_0'^2 - 8\mu' \varepsilon_0'^4 - 96\mu' \varepsilon_0'^2 \zeta_0^2 \\ \log (\pi') = \log \varrho'(\zeta)\varepsilon_0' + \mu \varepsilon_0'^2 + 5\mu(\zeta)^2 \end{cases}$$

Ferner

$$(79)\quad \begin{cases} \log (\mu) = \log . b \cos^2(\zeta) - c \cos^2(\zeta) + c' \cos^4(\zeta) - c'' \cos^6(\zeta) \\ (\Delta\omega) = mE(\chi) \sin (\zeta) + E' \sin (\zeta) \cos (2(\beta' + (\pi')) - (\chi)) \sin (\chi) \\ (\omega) = \lambda + (\Delta\omega) \end{cases}$$

wo die Coefficienten b, c, d, E, E' die früher angegebenen Werthe haben.

62.

Für die Gleichungen des Art. 57 ist wieder eine Reihenentwickelung zulässig, die der vorigen ähnlich ist, und von welcher ich daher das Resultat ohne Weiteres sogleich ansetzen werde.

$$(80)\quad \begin{cases} q_0' = (\omega) \sin \beta'' \\ n_0' = (\omega) \cos \beta'' \\ \log q' = \log g_0' + 4\mu n_0'^2 + 112\mu' n_0'^4 - 96\mu' n_0'^2 q_0'^2 \\ \log n' = \log n_0' - 2\mu q_0'^2 - 8\mu' q_0'^4 - 96\mu' n_0'^2 q_0'^2 \\ \log g' = \log \varrho' q' n' + \mu q'^2 + \mu n'^2 + 7\mu' q'^4 - 30\mu' q'^2 n'^2 + 7\mu' n'^4 \\ N' = \beta' - \beta'' - g' \end{cases}$$

und nachdem $\gamma' = \alpha'' + q'$, und $\chi = N' + u'$ gesetzt worden sind,

$$(81)\quad \begin{cases} a_0' = \dfrac{n'}{\sin N'} \\ \gamma_0' = \dfrac{n'}{\operatorname{tg} N'} \\ \log \alpha' = \log a_0' - 4\mu\gamma_0'^2 + 112\mu'\gamma_0'^4 + 96\mu'\gamma_0'^2 a_0'^2 \\ \log \gamma' = \log \gamma_0' - 2\mu\gamma_0'^2 - 2\mu a_0'^2 + 40\mu'\gamma_0'^4 + 176\mu'\gamma_0'^2 a_0^2 - 8\mu' a_0'^4 \\ \log u' = \log \varrho' n' \gamma' + \mu\alpha'^2 + 4\mu'\gamma'^4 - 4\mu'\alpha'^2\gamma'^2 + 7\mu'\alpha'^4 \\ \alpha'' = \gamma' - q' \\ \chi = N' + u' \end{cases}$$

Nachdem hieraus α', α'', χ berechnet worden sind, müssen wo nöthig

die Differentialformeln des Art. 58 angewandt werden, von welchen die ersten jetzt die folgende Form annehmen,

$$\delta\zeta = \cos(\beta' + \pi')\delta\alpha' \ ; \quad \delta\pi' = \sin(\beta' + \pi')\operatorname{tg}\zeta\delta\alpha'$$

$$\delta . \log\mu = -\frac{2M}{r}\operatorname{tg}\zeta\delta\zeta$$

$$\delta\Delta\omega = \frac{(\Delta\omega)}{(\chi)}\delta\chi + \frac{(\Delta\omega)}{r}\operatorname{cotg}\zeta\delta\zeta$$

Der Fall, in welchem die Azimuthe nahe $= 180^0$ sind, braucht hier nicht besonders betrachtet zu werden, da man ihn immer dadurch vermeiden kann, dass man von den beiden gegebenen Polhöhen die nördlichere mit B' bezeichnet.

63.

Der Fall $\lambda = 0$, den man auch damit bezeichnen kann, dass die Länge des Meridianbogens zu bestimmen ist, der von zwei gegebenen Punkten, deren Polhöhe B' und B'' sind, eingeschlossen ist, und der den Gegensatz zu dem im Art. 34 betrachteten Falle bildet, kann kurz erörtert werden. Es wird vor Allem, wie a. a. O.,

$$\log\mu = 7.2238036$$

und da auch $\omega = 0$ ist, so geben die Gleichungen des Art. 34 sogleich

$$\chi = \pm(\beta' - \beta'') \ , \quad \varphi' = 90 \mp \beta'$$

wo die oberen Zeichen gelten wenn $\beta' > \beta''$ und die unteren wenn $\beta' < \beta''$ ist.

Aus χ wird, wie vorher, durch die weiter unten zu entwickelnden Ausdrücke σ berechnet.

64.

Der specielle Fall der vorhergehenden Hauptaufgabe, welcher im Art. 35 behandelt wurde, bildet in seinem Gegensatze eine besondere Aufgabe, deren Auflösung für sich betrachtet werden muss, und die folgender Maassen ausgesprochen werden kann:

»Die Lage irgend eines Punkts auf dem Erdellipsoid sei durch des»sen Polhöhe und Längenunterschied von einem gewissen anderen Me»ridian, den ich den ersten Meridian nennen will, gegeben; man fragt

»nach der geodätischen Linie, die durch den gegebenen Punkt geht und »den ersten Meridian unter einem rechten Winkel schneidet, nach der »Polhöhe, unter welcher der erste Meridian von derselben geschnitten »wird, und nach dem Azimuth derselben am gegebenen Punkt.«

Die gegebenen Stücke sind hier B' und λ, wozu die Bedingungsgleichung $\alpha''=90^0$ kommt. Diese letztere bewirkt, dass $\gamma=90^0$ ein genäherter Werth von γ ist, nehmen wir zuerst diesen an, und bezeichnen die Werthe von Γ und χ_0, die daraus hervorgehen, mit (Γ) und (χ_0), so geben die Gleichungen (45) leicht

$$(82) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \cos(\chi_0)\sin(\Gamma) &= \sin B' \\ \cos(\chi_0)\cos(\Gamma) &= \cos B' \cos\lambda \\ \sin(\chi_0) \qquad\quad &= \cos B' \sin\lambda \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen geben zu erkennen, dass die vorliegende Aufgabe immer zwei Auflösungen hat. Da B' immer zwischen den Grenzen -90^0 und $+90^0$ liegt, und λ immer zwischen 0 und 180^0 angenommen werden kann, so zeigt die letzte Gleichung, dass (χ_0) auch immer zwischen 0 und 180^0 liegt. In den beiden ersten Gleichungen kann man aber $\cos(\chi_0)$ sowohl positiv wie negativ nehmen, und da beide Annahmen immer zulässig sind, so entstehen immer zwei Auflösungen, eine in welcher $(\chi_0) < 90^0$, und eine andere, in welcher $(\chi_0) > 90^0$ ist. Bei der einen Auflösung ergiebt sich (Γ) innerhalb seiner natürlichen Grenzen -90^0 und $+90^0$, aber bei der anderen übersteigt (Γ) diese Grenzen. Es wird hiedurch angezeigt, dass die geodätische Linie vom gegebenen Punkt aus sich auf die entgegengesetzte Seite des Meridians desselben erstreckt, und der Länge $\lambda-180^0$ vom ersten Meridian, oder der zweiten Hälfte desselben, von Pol zu Pol gezählt, entspricht; in diesem Falle ist in den ferneren Rechnungen nicht nur $180^0-\lambda$, sondern auch $180^0-(\Gamma)$ anzuwenden.

Setzt man nun in jedem Falle $\gamma=90^0+\delta\gamma$, so wird bis auf Grössen von der Ordnung $\delta\gamma^3$

$$\cos\gamma = -\delta\gamma\,; \quad \sin\gamma = 1 - \tfrac{1}{2}\delta\gamma^2$$

und die Werthe von Γ und χ_0, die diesem Werthe von γ entsprechen, erhält man leicht aus den (45) in folgender Form,

$$(83) \quad \ldots \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma &= (\Gamma) + \operatorname{tg}(\chi_0)\,\delta\gamma \\ \chi_0 &= (\chi_0) + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}(\chi_0)\,\delta\gamma^2 \end{aligned} \right.$$



die ebenfalls bis auf Grössen von der Ordnung $\delta\gamma^3$ genau sind. Die Gleichungen (28) geben leicht, wenn man $\alpha''=90^0$ macht,

$$\cos\beta'\sin\alpha' = \cos\beta''$$
$$\cos\beta'\cos\alpha' = -\sin\beta''\sin\chi$$
$$\sin\beta' = \sin\beta''\cos\chi$$

und hiemit werden die beiden letzten (52)

$$\gamma = 90^0 + \tfrac{1}{2}e^2\sin\beta''\cos\beta''\left(\chi - 2\cos\chi\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\chi\right)$$
$$\chi_0 = \chi - \tfrac{1}{2}e^2\{\chi\cos^2\beta'' + \sin\chi\cos\chi\sin^2\beta''\}$$

Da wir nun hier ohne den Grad der Genauigkeit zu verletzen (Γ) statt β'', und (χ_0) statt χ setzen dürfen, so bekommen wir

$$\delta\gamma = \tfrac{1}{2}re^2\sin(\Gamma)\cos(\Gamma)\left\{\frac{(\chi_0)}{r} - 2\cos(\chi_0)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\chi_0)\right\} \quad . \quad (84)$$

welcher Ausdruck zur Anwendung in den (83) dient, und dafür hinreichend genau ist.

65.

Wegen $\alpha''=90^0$ wird hier $\beta''=\beta_0$, und wenn daher $\beta_0=\Gamma-f_0$ gesetzt wird, so verwandelt sich die Gleichung (49) in

$$\mathrm{tg}\,\Gamma = \sqrt{1-e^2}\,.\,\mathrm{tg}(\Gamma-f_0) + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\sin\beta'}{\cos(\Gamma-f_0)}$$

die leicht in die folgende umgeformt werden kann,

$$\{1-(1-\sqrt{1-e^2})\cos^2\Gamma\}\sin f_0 =$$
$$-(1-\sqrt{1-e^2})\sin\Gamma\cos\Gamma\cos f_0 + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta'\cos\Gamma$$

übergeht man nun die mit e^6 multiplicirten Glieder, so erhält man hieraus

$$\log f_0 = \log . i_0\sin\Gamma\cos\Gamma + M(1-\sqrt{1-e^2})\cos^2\Gamma \quad . \quad (85)$$

wo

$$i_0 = -(1-\sqrt{1-e^2}) + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\sin\beta'}{\sin\Gamma} \quad . \; . \; . \; . \quad (86)$$

gesetzt ist, und Γ den Bogen bedeutet, welcher sich aus der ersten (83) ergiebt. Hierauf wird

$$(\beta_0) = \Gamma - f_0$$

wo ich (β_0) statt β_0 geschrieben habe, weil der Werth von Γ nicht strenge genau ist. Da die Coefficienten des Ausdrucks für i_0 in Secunden ausgedrückt werden müssen, so wird wie im Art. 53

$$-(1-\sqrt{1-e^2}) = -689'',4962$$

$$\log \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} = 3.1402897$$

und ausserdem

(87) . . $\log M(1-\sqrt{1-e^2}) = 7.16189-10$

Den im vor. Art. erhaltenen Ausdruck für χ_0 kann man nun ohne den Grad der Genauigkeit, den er besitzt, zu verringern, in den folgenden abändern,

(88) . $(\chi) = \chi_0 + \frac{1}{2} re^2 \left\{ \frac{\chi_0}{r} \cos^2(\beta_0) + \sin\chi_0 \cos\chi_0 \sin^2(\beta_0) \right\}$

worin der aus der zweiten Gleichung (83) folgende Werth von χ_0 anzuwenden ist. Die auf diese Art erhaltenen Werthe von (β_0) und (χ) werden nur mit kleinen Fehlern behaftet sein, und der aus denselben auf die im Art. 56 angegebene Weise folgende Werth von $(\varDelta\omega)$ wird viel genauer sein. Da hier $\varphi''=0$ ist, woraus $\varphi' = -\chi$ folgt, so wird der letzt erwähnte Ausdruck im gegenwärtigen Falle

(89) . $(\varDelta\omega) = mE(\chi)\cos(\beta_0) - E'\cos(\beta_0)\sin(\chi)\cos(\chi)$

wo die Coefficienten durch die im Art. 56 gegebenen Ausdrücke zu berechnen sind, und wieder $(\omega) = \lambda + (\varDelta\omega)$ wird.

66.

Führt man nun die Bedingung $\alpha'' = 90^0$ in die Gleichungen (50) ein, so ergiebt sich leicht

$$\begin{aligned} \cos\chi \sin\beta_0 &= \sin\beta' \\ \cos\chi \cos\beta_0 &= \cos\beta' \cos(\omega) \\ \cos\chi \sin\alpha' &= \cos(\omega) \\ \cos\chi \cos\alpha' &= -\sin\beta' \sin(\omega) \\ \sin\chi &= \cos\beta' \sin(\omega) \end{aligned}$$

und die Werthe von β_0, α', χ die sich hieraus ergeben, werden kaum eine Verbesserung nöthig haben, die, wenn sie nicht unmerklich sein sollte, wieder durch Anwendung von einfachen Differentialformeln bewirkt werden kann.

Da hier beides

$$\delta\beta_0 = \beta_0 - (\beta_0) \text{ und } \delta\chi = \chi - (\chi)$$

unmittelbar gegeben sind, so kann man ohne Vorbereitung durch die Ausdrücke des Art. 58 $\delta.\log\mu$ und $\delta\Delta\omega$ berechnen, und hierauf wird

$$\Delta\chi = \cos\beta_0\,\delta\Delta\omega$$
$$\Delta\beta_0 = \sin\beta_0 \operatorname{tg}\chi\,\delta\Delta\omega$$
$$\Delta\alpha' = \frac{\sin\beta_0}{\cos\chi}\,\delta\Delta\omega$$

und man erhält die genauen Werthe

$$\chi + \Delta\chi\,; \quad \beta_0 + \Delta\beta_0\,; \quad \alpha' + \Delta\alpha'$$

Der Werth von $\delta.\log\mu$ wird wieder bei der Berechnung von s aus χ gebraucht, aber $\delta\varphi'$ fällt hier ganz weg.

Es ist bei dieser Aufgabe zu bemerken, dass die Unbekannten mit geringerer Genauigkeit erhalten werden, wie in den anderen Fällen, wenn λ nahe $= 90^0$, aber dieses ist nicht zu vermeiden, da die Aufgabe selbst es mit sich bringt. Denn wenn $\lambda = 90^0$, so wird auch $\beta_0 = 90^0$ und $\alpha' = 0$, oder die gesuchte geodätische Linie ist der Meridianbogen, welcher sich vom Punkte B' bis zum Pole erstreckt.

67.

Die in der vorhergehenden Auflösung der zweiten Hauptaufgabe vorbehaltene Berechnung von s aus χ, μ, φ' soll hier vorgenommen werden, und es wird dazu, s mag gross oder klein sein, am Zweckmässigsten der Ausdruck (17) verwandt, nachdem er auf die für diesen Zweck angemessenste Form gebracht sein wird. Diesem zufolge ist, wenn wieder $\sigma = r\frac{s}{a}$ gesetzt wird,

$$\sigma = A_1\chi + B_1\cos(2\varphi' + \chi)\sin\chi - C_1\cos(4\varphi' + 2\chi)\sin 2\chi + D_1\cos(6\varphi' + 3\chi)\sin 3\chi \quad (90)$$

wo

$$A_1 = \left(1 + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{13}{64}k^4 + \tfrac{45}{256}k^6\right)\sqrt{1 - e^2}$$
$$B_1 = r\left(\tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{3}{16}k^4 + \tfrac{79}{512}k^6\right)\sqrt{1 - e^2}$$
$$C_1 = r\left(\tfrac{1}{128}k^4 + \tfrac{5}{512}k^6\right)\sqrt{1 - e^2}$$
$$D_1 = \tfrac{r}{1536}k^6\sqrt{1 - e^2}$$

Führt man hier μ statt k durch die Gleichung (19) ein, so erhält man

$$A_1 = \left(1+\mu+\tfrac{5}{4}\mu^2+\mu^3\right)\sqrt{1-e^2}$$
$$B_1 = r\left(\mu+\mu^2+\tfrac{5}{8}\mu^3\right)\sqrt{1-e^2}$$
$$C_1 = r\left(\tfrac{1}{8}\mu^2+\tfrac{1}{8}\mu^3\right)\sqrt{1-e^2}$$
$$D_1 = \tfrac{r}{24}\mu^3$$

Setzt man

$$A_1' = \left(\mu+\tfrac{5}{4}\mu^2+\mu^3\right)\sqrt{1-e^2};$$
$$A_1'' = 1-\sqrt{1-e^2}$$

dann wird

$$(91)\qquad \sigma = \chi + A_1'\chi - A_1''\chi + B_1\cos(2\varphi'+\chi)\sin\chi - C_1\cos 2(2\varphi'+\chi)\sin 2\chi + D_1\cos 3(2\varphi'+\chi)\sin 3\chi$$

in welcher Form dieser Ausdruck sich leichter berechnen lässt. Geht man zu den Logarithmen der Coefficienten über, so findet man

$$\log.\text{nat}\,A_1' = \log.\text{nat}\,\mu\sqrt{1-e^2}+\tfrac{5}{4}\mu+\tfrac{7}{32}\mu^2$$
$$\log\,\text{nat}\,B_1 = \log.\text{nat}\,r\mu\sqrt{1-e^2}+\mu+\tfrac{1}{8}\mu^2$$
$$\log.\text{nat}\,C_1 = \log.\text{nat}\tfrac{r}{8}\mu^2\sqrt{1-e^2}+\mu$$
$$\log D_1 = \log\tfrac{r\mu^3}{24}$$

Für die Briggischen Logarithmen ergiebt sich hieraus

$$(92)\ \ldots\ \begin{cases}\log A_1' = \log a\mu + b\mu + c\mu^2\\ \log B_1 = \log d\mu + f\mu + g\mu^2\\ \log C_1 = \log h\mu^2 + k\mu\end{cases}$$

wo

$$\log a = 9.9985458-10$$
$$\log b = 9.73469\quad -10$$
$$\log c = 8.9778\quad -10$$
$$\log d = 5.3129709$$
$$\log f = 9.63778\quad -10$$
$$\log g = 8.7347\quad -10$$
$$\log h = 4.40988$$
$$\log k = 9.6378\quad -10$$

und ausserdem

$$\log A_1'' = 7.5241069-10$$

ist. Da hier die genauen Werthe zu substituiren sind, so sind im Sinne des Art. 58

$$\varphi' = (\varphi') + \delta\varphi\,; \quad \log\mu = \log(\mu) + \delta.\log\mu$$

nebst $\chi + \varDelta\chi$ anzuwenden. Für die Aufgabe der Artt. 60 u. f. geht der obige Ausdruck für σ in den folgenden über

$$\sigma = \chi + A_1'\chi - A_1''\chi - B_1\cos(2(\beta' + \pi') - \chi)\sin\chi$$
$$- C_1\cos 2(2(\beta' + \pi') - \chi)\sin 2\chi - D_1\cos 3(2(\beta' + \pi') - \chi)\sin 3\chi \quad (93)$$

wo ebenfalls $\pi' = (\pi') + \delta\pi'$, etc. zu substituiren sind. Für die Aufgabe der Artt. 64 u. f. ergiebt sich

$$\sigma = \chi + A_1'\chi - A_1''\chi + \tfrac{1}{2}B_1\sin 2\chi - \tfrac{1}{2}C_1\sin 4\chi + \tfrac{1}{2}D_1\sin 6\chi \quad (94)$$

wo wieder die eben bezeichneten Werthe von χ und $\log\mu$ zu substituiren sind. Zum Ueberfluss bemerke ich, dass hierauf $s = \sigma\frac{a}{r}$ wird.

Hiemit ist die zweite Hauptaufgabe vollständig gelöst. Will man ausserdem noch den elliptischen Bogen S kennen lernen, so dienen dazu die Ausdrücke des Art. 50, es kann jedoch kaum je ein Interesse haben diesen kennen zu lernen, dessen Unterschied von s nur eine Grösse von der Ordnung e^4 ist.

68.

Um auch die eben gelöste Aufgabe durch einige Beispiele zu erläutern, will ich zuerst die geodätische Linie, nebst den Azimuthen an ihren Endpunkten, berechnen, die Orsk in Russland und Valentia in Irland mit einander verbindet. Es sind diese Oerter bekanntlich die Endpunkte der grossen Längengradmessung, die jetzt in Ausführung begriffen ist. Da die astronomischen Positionen dieser beiden Oerter jetzt noch nicht endgültig festgesetzt sind, so muss ich mich damit begnügen sie aus einem Verzeichniss geographischer Ortsbestimmungen zu entnehmen, und werde hiebei, eben weil diese Angaben nur als vorläufig zu betrachten sind, die Secunden weglassen. Ich nehme daher an

Orsk — Valentia

$$B' = 51^0\,12'\,; \quad B'' = 51^0\,55'\,; \quad \lambda = 69^0\,3'$$

Aus diesen Werthen von B' und B'' ergab sich zuerst

$$\beta' = 51^0\,6'\,22'',60\,; \qquad \beta'' = 51^0\,49'\,24'',54$$
$$\log\sin\beta' = 9.8911537\,; \qquad \log\sin\beta'' = 9.8954835$$
$$\log\cos\beta' = 9.7978751\,; \qquad \log\cos\beta'' = 9.7910491$$

Hierauf erhielt ich durch die (70)

$$m = 74^\circ\, 20'\, 48'',10\ ,\quad n = 35^\circ\, 10'\, 24'',84$$

$\log p = 0.0008820$, und die (72) gab diesen Werth von $\log p$ ohne Unterschied wieder. Die (74) gaben hierauf

$$\alpha_0' = 119^\circ\, 9'\, 7'',16\ ;\quad \chi_0 = 41^\circ\, 16'\, 11'',76$$

Ich habe diese Rechnungen mit Logarithmen von sieben Decimalen ausgeführt, allein es wäre ausreichend gewesen dazu Logarithmen von fünf Stellen zu verwenden. Es geben hierauf die (73)

$$(\alpha') - \alpha_0' = +\, 11'',04\ ;\quad (\chi) - \chi_0 = +\, 7'\, 43'',18$$

und folglich wird

$$(\alpha') = 119^\circ\, 9'\, 18'',20\ ;\quad (\chi) = 41^\circ\, 23'\, 54'',94$$

Hiemit gaben die Gleichungen (74) mit Anwendung von Logarithmen von fünf Decimalen

$$(\varphi') = -\, 21^\circ\, 27'\, 21''\ ;\quad \log\sin(\beta_0) = 9.92234$$
$$\log\cos(\beta_0) = 9.73905$$
$$\log(\mu) = 7.06893$$

Ausserdem wurden

$$\log E = -\, 0.00025\ ;\quad \log E' = 9.6057$$

gefunden, worauf durch die (75) sich

$$(\Delta\omega) = +\, 4'\, 32'',86$$

folglich

$$(\omega) = 69^\circ\, 7'\, 32'',86$$

ergab. Durch Anwendung von Logarithmen von sieben Stellen geben nun die Gleichungen des Art. 57

$$m' = 74^\circ\, 20'\, 57'',74\ :\quad \log\sin n' = 9.7615657$$
$$q' = 64\quad 7\quad 18,07\ ;\quad \log\cos n' = 9.9118913$$
$$\alpha' = 119\quad 9\quad 18,20\ ;\quad \alpha'' = 62^\circ\, 30'\, 57'',27$$
$$\chi = 41^\circ\, 23'\, 57'',33$$

Die Vergleichung dieser Werthe von α' und χ mit denen von (α') und (χ) giebt

$$\delta\alpha' = 0'',00\ ,\quad \delta\chi = +\, 2'',39$$

und die Anwendung der Differentialformeln des Art. 58 hierauf zeigt, dass die Verbesserungen der eben erhaltenen Werthe weit weniger wie $0'',01$ betragen. Die eben erhaltenen Werthe von α', α'', χ sind also

schon so genau, wie man sie durch Anwendung von Logarithmen von nicht mehr wie sieben Decimalen erhalten kann. Da $\delta\alpha'$ Null ist, so werden auch die Verbesserungen von β_0, φ', μ, gleich Null, und es kann zur Berechnung von s geschritten werden.

Bevor ich diese vornehme, will ich in Betreff der Azimuthe noch die folgenden Bemerkungen einschalten. Da ich in der vorstehenden Berechnung Orsk als den Anfangspunkt betrachtet habe, und Valentia westlich von Orsk liegt, so sind die erhaltenen Azimuthe, nemlich α' an Orsk, und zufolge des Art. 10 $180^0+\alpha''$ an Valentia vom Südpunkt des Meridians an in der Richtung nach Westen zu zählen. Hätte ich im Gegentheil Valentia zum Anfangspunkt gewählt, welches ohne Aenderung der Formeln auch hätte geschehen können, und dabei wieder λ positiv angenommen, so würde die Rechnung die Azimuthe zwar wieder vom Südpunkt des Meridians an, aber von da in der Richtung nach Osten gezählt, gegeben haben.

Um nach den Ausdrücken des Art. 67 die geodätische Linie s zu berechnen, bekommt man zuerst durch die (92)

$$\log A_1' = 7.06812\,; \quad \log B_1 = 2.38241$$
$$\log C_1 = 8.5483$$

worauf der Ausdruck (91)

$$\sigma = 41^0\,21'\,12'',90$$

giebt, aus welchem durch Anwendung des im Art. 23 angegebenen Werthes von a

$$s = 2361641,92 \text{ Toisen}$$

folgt.

Vergleicht man das im Art. 36 gegebene Beispiel mit dem vorstehenden, so sieht man sogleich, dass es diesem entnommen ist. Ausser dem gegebenen Stücke B', welches beiden Aufgaben gemeinschaftlich ist, habe ich dort die hier durch die Rechnung erhaltenen Werthe von α' und s als gegeben betrachtet, und daraus die hier als gegeben betrachteten Stücke B'' und λ nebst α'' berechnet. Die Uebereinstimmung ist so gut, wie sie durch Anwendung von Logarithmen von nicht mehr wie sieben Decimalen erwartet werden darf.

69.

Um zu zeigen in wie grosser Ausdehnung die vorhergehende Auflösung in ihrer ersten Annäherung immer noch die Hunderttheile von Secunden richtig giebt, habe ich auch das folgende Beispiel von weit grösseren Dimensionen gerechnet. Es soll die geodätische Linie zwischen Moskau und Santiago in Chili, nebst deren Azimuthen bestimmt werden. Zufolge der Verzeichnisse geographischer Ortsbestimmungen nehme ich als gegeben an,

Moskau Santiago

$$B' = 55^0\,45'\;;\quad B'' = -\,33^0\,26'\;;\quad \lambda = 108^0\,13'$$

woraus zuerst

$$\beta' = 55^0\,39'\,38''49\;;\qquad \beta'' = -\,33^0\,20'\,42'',63$$
$$\log\sin\beta' = 9.9168283\;;\qquad \log\sin\beta'' = 9.7401112n$$
$$\log\cos\beta' = 9.7513505\;;\qquad \log\cos\beta'' = 9.9218811$$

folgt. Man erhält nun ebenso wie im vor. Art.

$$m = 244^0\,17'\,13'',98\;;\qquad \log\sin n = 9.9013043$$
$$\log\cos n = 9.7812898$$
$$\alpha_0' = 83^0\,34'\,30'',28\;;\qquad \chi_0 = 126^0\,42'\,7'',80$$
$$(\alpha') - \alpha_0' = -\,10'\,29'',70\;;\qquad (\chi) - \chi_0 = +\,23'\,5'',90$$
$$(\alpha') = 83^0\,24'\;\;0'',58\;;\qquad (\chi) = 127^0\,5'\,13'',70$$
$$(\varphi') = 4^0\,29'\,22'',67\;;\qquad \log\sin(\beta_0) = 9.9181630$$
$$\log\cos(\beta_0) = 9.7484629$$
$$\log(\mu) = 7.0605858$$
$$\log E = -\,0.0002499\;;\qquad \log E' = 9.59737$$
$$(\varDelta\omega) = +\;14'\,16'',62$$
$$(\omega) = 108^0\,27\;\;16,\,62$$
$$m' = 244^0\,18'\,31'',48\;;\qquad \log\sin n' = 9.8989527$$
$$q' = 238\;\;44\;\;16,\,19\;;\qquad \log\cos n' = 9.7853175$$
$$\alpha' = 83\;\;23\;\;51,\,20\;;\qquad \alpha'' = 42^0\,7'\,37'',98$$
$$\chi = 127^0\,5'\,18'',48$$

Es wird ferner

$$\delta\alpha' = -\,9'',38\;;\qquad \delta\chi = +\,4'',78$$

und hiemit geben die Ausdrücke des Art. 58

$$\delta\beta_0 = +\,0'',73\;;\qquad \delta\varphi' = +\,6'',33$$
$$\delta\log\mu = +\,0.0000022$$

woraus $\delta \varDelta \omega = + 0'',0044$, und

$$\varDelta \chi = + 0'',0025 \; ; \quad \varDelta \alpha' = + 0'',0035 \; ; \quad \varDelta \alpha'' = + 0'',0004$$

hervorgehen. Die erste Annäherung hat also wieder hier die Unbekannten schon so genau gegeben, wie man sie überhaupt durch Anwendung von Logarithmen von nicht mehr wie sieben Decimalen erhalten kann. Für die Berechnung von σ durch den Ausdruck (91) wird nun

$$\log \mu = 7{,}0605800$$
$$\varphi' = 4^0\, 29'\, 29'',00$$

und hiemit ergiebt sich

$$\log A_1' = 7.0597577 \; ; \quad \log B_1 = 2.3740580 \; ; \quad \log C_1 = 8.53156$$
$$\sigma = 126^0\, 46'\, 18'',17$$

welchen Werth man wie oben auf ein Linearmaass hinführen kann.

70.

Um auch ein Beispiel vom Falle zu geben, wo s klein ist, will ich nach dem Art. 37

$$B' = 20^0 \; ; \quad B'' = 18^0\, 15'\, 18'',417 \; ; \quad \lambda = 1^0\, 3'\, 8'',983$$

als gegeben annehmen, und mich der Reihen des Art. 53 bedienen. Durch die Ausdrücke (62) und (63) bekommt man zuerst

$$i = 818'',7757 \; ; \quad f = 4'\, 2'',8228$$

worauf die (64)

$$q = 19'\, 47'',671 \; ; \quad \log n = 3.5560673.1$$
$$g = 10,\, 3591 \; ; \quad N = 1^0\, 43'\, 53'',5821$$
$$\log N = 3.7947376.6$$

geben. Um die Azimuthe möglichst genau zu erhalten, habe ich in diesen Rechnungen bei den Interpolationen in den siebenstelligen Tafeln die achte Stelle mit berücksichtigt; ein Verfahren, welches ich in anderen Fällen auch angewandt habe, und durch welches man in den Summen und Differenzen mehrerer Logarithmen die siebente Stelle genauer erhält. Durch die (65) erhält man nun

$$h = 0.0000110.1$$
$$H = 0.0000330.5$$

worauf die (66)

$$K = 29^0\, 59'\, 32'',90 \; ; \quad L = 27'',187$$

und die (67)

$$\alpha_0' = 30^0\,0'\,0'',087\ ;\quad \gamma = 29^0\,39'\,18'',041$$

geben. Die (68) und (69) geben hierauf

$$\chi_0 = 1^0\,59'\,57'',193$$

Nachdem ferner durch die (61)

$$\alpha' = \alpha_0' - 0'',107$$
$$\alpha'' = \gamma + 0,215$$
$$\chi = \chi_0 + 24,359$$

gefunden worden war, erhielt ich

$$\alpha' = 29^0\,59'\,59'',980$$
$$\alpha'' = 29\ \ 39\ \ 18,256$$
$$\chi = \ \ 2\ \ \ 0\ \ 21,552$$

Vergleicht man diese Azimuthe mit denen des Beispiels des Art. 37, so wird man finden, dass sie 0″,02 kleiner ausgefallen sind, aber weiter kann man im gegenwärtigen Falle die Uebereinstimmung nicht zu Wege bringen, wenn man nicht Logarithmen von mehr wie sieben Decimalen anwenden will. Der Unterschied der Azimuthe stimmt weit genauer mit dem des Art. 37 ein, und entfernt sich nur um 0″,003 davon. Diese Ergebnisse sind mit der Natur der Aufgabe aufs Engste verbunden, und können nicht davon getrennt werden.

Um σ zu erhalten müssen zuerst durch die Ausdrücke des Art. 22 φ' und $\log\mu$ gerechnet werden, deren Werthe dieselben werden wie im Art. 37, nemlich,

$$\varphi' = 67^0\,16'\,21'',24\ ;\quad \log\mu = 7.1164109$$

Aus den Ausdrücken (92) erhält man

$$\log A_1' = 7.11496\ ;\quad \log B_1 = 2.42924$$
$$\log C_1 = 8.642$$

worauf die (91)

$$\sigma = 1^0\,59'\,59'',996$$

giebt, welcher Werth von dem des Art. 37 nur um 0″,004 verschieden ist.

71.

Für die Aufgabe des Art. 60 u. f. sollen Christiania in Norwegen und Palermo als Beispiel dienen, da diese Punkte in der mitteleuropäi-

schen Gradmessung voraussichtlich mit zu den wichtigeren gehören werden. Mit Weglassung der Secunden geben die Verzeichnisse

Christiania Palermo

$$B' = 59^0\,55'\,;\quad B'' = 38^0\,7'\,;\quad \lambda = 2^0\,38'$$

woraus zuerst

$$\beta' = 59^0\,50'\,0'',189\,;\qquad \beta'' = 38^0\,1'\,24'',729$$

$$\log\sin\beta' = 9.9367990\,;\qquad \log\sin\beta'' = 9.7895703$$

$$\log\cos\beta' = 9.7011501\,;\qquad \log\cos\beta'' = 9.8963928$$

folgen. Durch die Ausdrücke (62) und (63) des Art. 52 ergab sich zuerst

$$i = 1249'',238\,;\quad f = +\,10'\,4'',798$$

worauf die Ausdrücke des Art. 60 u. f. in Anwendung gebracht wurden. Die (76) geben

$$\log n = 3.8721438\,;\quad g = 1'\,45'',915\,;\quad N = 21^0\,41'\,44'',558$$

und die (77)

$$\alpha_0' = 5^0\,34'\,57'',09\,;\quad u = 5'\,37'',41\,;\quad \chi_0 = 21^0\,47'\,21'',97$$

Da nun die (73)

$$(\alpha') = \alpha_0' - 0'',97\,;\quad (\chi) = \chi_0 + 5'\,4'',10$$

geben, so wurden

$$(\alpha') = 5^0\,34'\,56'',12\,;\quad (\chi) = 21^0\,52'\,26'',07$$

welche zur Berechnung von (ω) dienen. Zu diesem Ende geben die (78) zuerst

$$(\zeta) = 2^0\,48'\,6'',68\,;\quad (\pi') = 7'\,5'',494$$

Die erste (79) gab nun

$$\log(\mu) = 7.2227682$$

worauf die Ausdrücke des Art. 23, die im Art. 56 wiederholt sind

$$\log E = -\,0,0003632\,;\quad \log E' = 9.754$$

und die zweite und dritte (79)

$$(\varDelta\omega) = 12'',856\,;\quad (\omega) = 2^0\,38'\,12'',856$$

geben. Aus den (80) erhielt ich hierauf

$$q' = 1^0\,37'\,30'',022\,;\quad \log n' = 3.8737315$$
$$g' = \quad 1\;\;46,\,050$$

und aus den (81)

$$\alpha' = 5^0\,34'\,56'',120\,;\quad \gamma' = 5^0\,10'\,57'',442$$
$$u' = \quad 5\;\;38,\,432$$
$$\alpha'' = 3\;\;33\;\;27,\,420\,;\quad \chi = 21\;\;52\;\;27,\,842$$

Vergleicht man diese Werthe von α' und χ mit denen von (α') und (χ), so findet man

$$\delta\alpha' = 0.00 \;, \quad \delta\chi = +1'',772$$

Hiemit werden

$$\delta\zeta = 0 \;, \quad \delta\pi' = 0 \;, \quad \delta.\log\mu = 0 \;, \quad \delta\Delta\omega = +0'',0003$$

Dieser Werth von $\delta\Delta\omega$ kann die eben erhaltenen Resultate nicht merklich ändern, die also die Endresultate sind. Für σ geben die (92)

$$\log A_1' = 7.2222206 \;; \quad \log B_1 = 2.5364642$$
$$\log C_1 = 8.8561$$

worauf man durch die (93) ohne Weiteres

$$\sigma = 21^0\, 50'\, 33'',909$$

erhält. Die Daten des Beispiels des Art. 38 sind aus diesem Beispiel entnommen, und die Uebereinstimmung der Resultate lässt nichts zu wünschen übrig.

72.

Um auch die Aufgabe der Artt. 64 u. f. durch ein Beispiel zu erläutern, soll von Santiago aus eine geodätische Linie senkrecht auf den Meridian von Moskau gezogen werden. Die gegebenen Stücke sind hier

$$B' = -33^0\, 26' \;; \quad \lambda = 108^0\, 13'$$

woraus man wie im Art. 69 zuerst

$$\beta' = -33^0\, 20'\, 42'',63 \;; \quad \log\sin\beta' = 9.7401112n$$
$$\log\cos\beta' = 9.9218811$$

findet. Es sind nun zuerst durch die Gleichungen (82) (Γ) und (χ_0) zu berechnen, und nimmt man hiebei zuerst $\cos(\chi_0)$ positiv an, so bekommt man

$$(\Gamma) = 244^0\, 39'\, 44'',78 \;; \quad (\chi_0) = 52^0\, 26'\, 19'',43$$

Nimmt man hingegen $\cos(\chi_0)$ negativ an, so ergiebt sich

$$(\Gamma) = +64^0\, 39'\, 44'',78 \;; \quad (\chi_0) = 127^0\, 33'\, 40'',57$$

Für die erste Auflösung, die zuerst ausgeführt werden soll, muss zufolge des Art. 64 geschrieben werden,

$$(\Gamma) = -64^0\, 39'\, 44'',78 \;; \quad \lambda = 71^0\, 47'$$

und sie gehört der Hälfte des Moskauer Meridians an, auf welcher Moskau nicht liegt. Hiemit muss der Werth

$$(\chi_0) = 52^0\, 26'\, 19'',43$$

verbunden werden. Die nächste Arbeit ist nun aus der (84) $\delta\gamma$ zu rechnen, und hiefür findet man

$$\delta\gamma = -1'\,23'',80$$

welcher Werth in die (83) gesetzt,

$$\Gamma = -64^0\,41'\,33'',75$$
$$\chi_0 = \quad 52\;\;26\;\;19,45$$

giebt. Die (86) und (85) geben hierauf

$$i_0 = +150'',38\;;\quad f_0 = -58'',15$$

woraus sich

$$(\beta_0) = -64^0\,40'\,35'',60$$

ergiebt. Aus (88) wird jetzt

$$(\chi) = \chi_0 + 6'\,27'',05$$

folglich

$$(\chi) = 52^0\,32'\,46'',50$$

und nachdem durch die Ausdrücke des Art. 23 oder 56

$$\log(\mu) = 7.1363172\;;\quad \log E = -0.0002975$$
$$\log E' = 9.6731$$

gerechnet worden ist, giebt die (89)

$$(\varDelta\omega) = +4'\,30'',19\;;\quad (\omega) = 71^0\,51'\,30'',19$$

womit alle Vorbereitungen zur Anwendung der Gleichungen des Art. 66 gemacht sind. Diese Gleichungen geben nun

$$\beta_0 = -64^0\,40'\,35'',84$$
$$\alpha' = \quad 30\;\;47\;\;54,04$$
$$\chi = \quad 52\;\;32\;\;47,57$$

und vergleicht man diese mit den obigen Werthen von (β_0) und (χ), so findet man

$$\delta\beta_0 = -0'',24\;;\quad \delta\chi = +1'',07$$

Die Differentialformeln des Art. 58 geben hierauf

$$\delta.\log\mu = +0.0000005\;;\quad \delta\varDelta\omega = +0'',0008$$

welcher letztere durchaus keinen merklichen Einfluss auf die eben gefundenen Werthe von β_0, α', χ hat, die also die genauen Endresultate sind.

Aus den (92) findet man nun

$$\log A_1' = 7.13561\;;\quad \log B_1 = 2.44988\;;\quad \log C_1 = 8.683$$

und hiemit giebt die (94)

$$\sigma = 52^0\,28'\,49'',75$$

und aus dem obigen Werthe von β_0 erhält man

$$B_0 = -\ 64^\circ\ 45'\ 2'',59$$

womit die Auflösung ausgeführt ist.

Nehmen wir nun den zweiten Fall vor, nemlich

$$(\Gamma) = +\ 64^\circ\ 39'\ 44''78\ ; \quad \lambda = 108^\circ\ 13'$$
$$(\chi_0) = \quad 127\ \ 33\ \ 40,\ 57$$

und behandeln ihn genau eben so wie den vorhergehenden, so bekommt man nach und nach die folgenden numerischen Werthe,

$$\delta\gamma = +\ 20'\ 51'',89$$
$$\Gamma = 64^\circ\ 12'\ 36'',9\ ; \qquad \chi_0 = 127^\circ\ 33'\ 35'',63$$
$$i_0 = -\ 1532'',76\ ; \qquad f_0 = -\ 10'\ 0'',8$$
$$(\beta_0) = 64^\circ\ 22'\ 37'',7\ ; \qquad (\chi) = \chi_0 +\ 16'',16$$
$$(\chi) = 127^\circ\ 33'\ 51'',79$$
$$\log(\mu) = 7.1341608\ ; \quad \log E = -\ 0.0002960$$
$$\log E' = 9.6710$$
$$(\varDelta\omega) = 11'\ 3'',50\ ; \qquad (\omega) = 108^\circ\ 24'\ 3'',50$$
$$\beta_0 = \quad 64^\circ\ 22'\ 17'',72$$
$$\alpha' = 148\ \ 49\ \ \ 1,\ 63$$
$$\chi = 127\ \ 33\ \ 54,\ 04$$

Vergleicht man diese mit den Werthen von (β_0) und (χ), so erhält man

$$\delta\beta_0 = -\ 19'',98\ ; \quad \delta\chi = +\ 2'',25$$

Hiemit geben die Differentialformeln des Art. 58

$$\delta.\log\mu = -\ 0.0000404\ ; \quad \delta\varDelta\omega = +\ 0''1372$$

und aus $\delta\varDelta\omega$ folgt durch die des Art. 66

$$\varDelta\chi = +\ 0'',06\ ; \quad \varDelta\beta_0 = -\ 0'',16\ ; \quad \varDelta\alpha' = -\ 0'',20$$

die Endwerthe werden also

$$\beta_0 = \quad 64^\circ\ 22'\ 17'',56$$
$$\alpha' = 148\ \ 49\ \ \ 1,\ 43$$
$$\chi = 127\ \ 33\ \ 54,\ 10$$

Mit dem berichtigten Werthe von μ, nemlich

$$\log\mu = 7.1341204$$

geben nun die (92)

$$\log A_1' = 7.1334057\ ; \quad \log B_1 = 2.4476828$$
$$\log C_1 = 8.6787$$

womit die (94)

$$\sigma = 127^\circ\ 16'\ 27'',86$$

giebt. Aus dem obigen Werthe von β_0 folgt

$$B_0 = 64^0\,26'\,46'',61$$

womit die Auflösung ausgeführt ist. Man erkennt sogleich, dass die beiden Beispiele des Art. 39 aus den vorstehenden entnommen sind; die Uebereinstimmung der Resultate ist so gut, wie man es wünschen kann.

73.

In den vorhergehenden Beispielen habe ich die Hülfsgrössen fast alle mit derselben Genauigkeit berechnet wie die schliesslichen Resultate, um zu zeigen wie klein ihre wahren Unterschiede sind, allein ich darf nicht unterlassen anzuführen, dass diese Genauigkeit keines Weges erforderlich ist. Wenn man die Resultate so genau erhalten will wie z. B. die Anwendung von Logarithmen von sieben Decimalen gestattet, so reicht man bei der Berechnung der Hülfsgrössen (α') und (χ), oder bez. (β_0) und (χ) mit Logarithmen von fünf, oder gar weniger Decimalen aus. Es ist blos dafür Sorge zu tragen, dass von (α') und (χ), oder bez. von (β_0) und (χ) an, die Rechnungen möglichst scharf ausgeführt werden. Ich werde dieses am zuletzt aufgestellten Beispiel zeigen. Statt der im vor. Art. erhaltenen Werthe von (β_0) und (χ) will ich annehmen, dass man

$$(\beta_0) = 64^0\,23'\,0'' \;;\quad (\chi) = 127^0\,34'\,20''$$

durch eine vorangegangene, minder genau ausgeführte Rechnung gefunden habe, und diese der weiteren Berechnung hier zu Grunde legen. Man bekommt damit durch dieselben Ausdrücke wie vorher

$$\log(\mu) = 7.1342059 \;;\quad \log E = -\ 0.0002961$$
$$\log E' = 9.6710$$
$$(\varDelta\omega) = 11'\,3'',39 \;;\qquad (\omega) = 108^0\,24'\,3''39$$
$$\beta_0 = \ \ 64^0\,22'\,17'',85$$
$$\alpha' = 148\ \ 49\ \ \ 1,79$$
$$\chi = 127\ \ 33\ \ 53,99$$

und es werden jetzt

$$\delta\beta_0 = -\ 42'',15 \;;\quad \delta\chi = -\ 26'',01$$

Hiemit geben nun die Differentialformeln

$$\delta.\log\mu = -\ 0.0000851 \;;\quad \delta\varDelta\omega = +\ 0'',2451$$
$$\varDelta\chi = +\ 0'',11 \;;\quad \varDelta\beta_0 = -\ 0'',28 \;;\quad \varDelta\alpha' = -\ 0'',36$$

und folglich werden die Endresultate

$$\beta_0 = 64^0\,22'\,17'',57$$
$$\alpha' = 148\;\;49\;\;\;1,\,43$$
$$\chi = 127\;\;33\;\;54,\,10$$

mit denen des vor. Art. übereinstimmend, obgleich ich sehr grosse Aenderungen mit den Werthen von (β_0) und (χ) vorgenommen habe. Der hier hervorgehende Werth

$$\log \mu = 7.1341208$$

weicht 4 Einheiten in der siebenten Stelle von dem des vor. Art. ab, allein dieser Unterschied ist auf den daraus folgenden Werth von σ von so geringer Wirkung, dass er weniger wie $0'',001$ ausmacht.

74.

Durch die Verbindung der Aufgaben dieses Abschnittes mit denen des vorhergehenden kann man eine Anzahl von Aufgaben der sphäroidischen Trigonometrie lösen, von welchen ich jedoch, um diese Abhandlung nicht allzuweit auszudehnen, nur Eine erklären will.

»In irgend einem sphäroidischen Dreiecke seien zwei Seiten nebst »ihren Azimuthen und der Polhöhe ihres Durchschnittspunkts gege»ben, die übrigen Stücke dieses Dreiecks zu finden.«

Man begreift sogleich, dass ein sphäroidisches Dreieck nicht durch blose drei Stücke, wie ein sphärisches Dreieck, gegeben ist, sondern dass zu den drei Stücken, die den in der sphärischen Trigonometrie verlangten analog sind, auch noch die Stücke hinzukommen müssen, die die Lage des Dreiecks auf dem Ellipsoid unzweideutig festsetzen. Die gegebenen Stücke der vorstehenden Aufgabe erfüllen diese Bedingungen. Ebenfalls ist die Auflösung des sphäroidischen Dreiecks damit nicht vollständig ausgeführt, dass man blos die Seiten und Winkel desselben berechnet, die nicht zu den gegebenen Stücken gehören, es muss vielmehr ausserdem auch die Lage jeder Ecke auf dem Ellipsoid bestimmt werden. In der vorstehenden Aufgabe sind also nicht blos die dritte Seite des Dreiecks und die beiden anliegenden Winkel, sondern auch die Polhöhe einer jeden der beiden anderen Ecken, und die Azimuthe der Dreiecksseiten an diesen beiden Ecken zu bestimmen.

75.

Die vorliegende Aufgabe lässt sich unmittelbar durch das Vorhergehende lösen, und bedarf keiner neuen Entwickelungen. Durch die Hauptaufgabe des ersten Abschnittes kann man abgesondert das Azimuth, die Polhöhe und den Längenunterschied der Endpunkte einer jeden der beiden gegebenen Dreiecksseiten berechnen. Da hierauf die Polhöhen und der Längenunterschied der beiden anderen Ecken des Dreiecks gegeben sind, so dient die zweite Hauptaufgabe dazu um daraus die dritte Dreiecksseite und deren Azimuthe zu berechnen, worauf alle Stücke des sphäroidischen Dreiecks bekannt sind.

Zufolge der Ausdehnung, die im Vorhergehenden den Entwickelungen gegeben worden ist, kann dieses Verfahren auf möglichst grosse sphäroidische Dreiecke angewandt werden, für einen davon weiter unten zu machenden Gebrauch will ich jedoch hier nur ein Dreieck von mässig grosser Ausdehnung als Beispiel wählen. Gegeben seien in Bogentheilen des Aequators die eine Dreiecksseite $=15^0$, mit dem Azimuth $=30^0$, und die andere Dreiecksseite $=17^0$ mit dem Azimuth $=108^0$, die reducirte Breite des Durchschnitts- oder Anfangspunkts dieser beiden Dreiecksseiten, welchem auch die Azimuthe angehören sei $=45^0$. Wendet man nun hierauf die Auflösung der Hauptaufgabe des ersten Abschnitts an, so ist in den dort angewandten Bezeichnungen gegeben,

1) $\beta' = 45^0\,, \quad \alpha' = 30^0\,, \quad \sigma = 15^0$

und hiemit findet man

$\varphi' = 40^0 53' 36'',21\,, \quad \Omega' = 67^0 47' 32'',43\,, \quad \log\sin\beta_0 = 9.9710040$

$\log\cos\beta_0 = 9.5484550$

$\log\mu = 7.1659930$

$S = 15^0 1' 41'',68\,, \quad x = -9'',28\,, \quad \varphi'' = 55^0 55' 27'',17\,, \quad \Delta\omega = 1' 3'',91$

$\alpha'' = 24^0 31' 40'',54\,, \quad \Omega'' = 76^0 33' 0'',04\,, \quad \beta'' = 31^0 36' 28'',21$

$\lambda = 8^0 44' 23'',70\,,$ Azimuth des Endpunkts $= 204^0 31' 40'',54$

Es ist ferner gegeben

2) $\beta' = 45^0\,, \quad \alpha' = 108^0\,, \quad \sigma = 17^0$

und hiemit findet man

$\varphi' = -17^0 10' 19'',34\,, \quad \Omega' = -24^0 40' 44'',62\,, \quad \log\sin\beta_0 = 9.8692895$

$\log\cos\beta_0 = 9.8276913$

$\log\mu = 6.9630399$

$S = 17^0\ 2'\, 28'',855$, $x = +\, 52'',946$
$\varphi'' = -0^0\ 8'\, 43'',43$, $\varDelta\omega = 2'\, 17'',67$
$\alpha'' = 90^0\ 9'\, 36'',04$, $\Omega'' = -\, 0^0 12'\, 58'',34$, $\beta'' = 47^0\, 44'\, 22'',57$
$\lambda = 24^0 25'\, 28'',61$, Azimuth des Endpunkts $= 270^0\, 9'\, 36'',04$

Es ist hierauf die Hauptaufgabe dieses Abschnittes auf die folgenden, durch die vorhergehende Rechnung gegebenen, Stücke anzuwenden,

$$\beta' = 31^0\, 36'\, 28'',21\ ,\quad \beta'' = 47^0\, 44'\, 22'',57\ ,\quad \lambda = 15^0\, 41'\, 4'',91$$

wo λ der Unterschied aus den beiden eben gefundenen Werthen derselben Grösse ist. Man erhält nun

$$\begin{aligned} \alpha_0' &= 147^0\, 57'\, 16''\ , & \chi_0 &= 20^0\, 1'\, 22'' \\ (\alpha') - \alpha_0' &= +\ 8''\ , & (\chi) - \chi_0 &= +\ 3'\, 25'' \\ (\alpha') &= 147^0\, 57'\, 24''\ , & (\chi) &= 20^0\, 4'\, 47'' \\ (\varphi') &= -\ 54^0\, 1'\, 13'',1\ , & \log\sin(\beta_0) &= 9.950409 \\ & & \log\cos(\beta_0) &= 9.654999 \\ & & \log(\mu) &= 7.124919 \\ (\varDelta\omega) &= 1'\, 49'',11\ , & (\omega) &= 15^0\, 42'\, 54'',02 \end{aligned}$$

$${}_{\prime}\alpha' = 147^0\, 57'\, 28'',19\ ,\quad \alpha'' = 137^0\, 47'\, 15'',63\ ,\quad \chi = 20^0\, 4'\, 46'',44$$

Azimuth des Endpunkts $= 317^0\, 47'\, 15'',63$

Die Unterschiede

$$\delta\alpha' = +\ 4'',19\ ,\quad \delta\chi = -\ 0'',56$$

geben

$$\varDelta\chi = \varDelta\alpha' = \varDelta\alpha'' = 0\ ,\quad \delta\varphi' = -\ 1'',3\ ,\quad \delta\log\mu = +\ 0.000007$$

und hiemit wird schliesslich

$$\sigma = 20^0\, 2'\, 24'',41$$

womit das sphäroidische Dreieck vollständig berechnet ist.

76.

Wenn man die eben erhaltenen Resultate übersichtlich zusammen stellen will, so muss man eine angemessene Bezeichnung einführen. Die reducirten Breiten der drei Ecken des Dreiecks sollen β, β', β'', die Winkel desselben bez. n, n', n'', und die gegenüber liegenden Seiten σ, σ', σ'' heissen. Die Azimuthe von σ' und σ'' in n sollen mit α' und α'', die von σ und σ'' in n' mit $\alpha_{,}$ und $\alpha_{,}''$, die von σ und σ' in n'' mit $\alpha_{''}$ und $\alpha_{''}'$, endlich der Längenunterschied von n und n' mit λ'', der von n und n'' mit λ', der von n' und n'' mit λ bezeichnet werden, und hiemit erhält

man die folgende Zusammenstellung, indem selbstverständlich die Dreieckswinkel den Unterschieden der bezüglichen Azimuthe gleich sind,

$\beta = 45^0$	$\beta' = 31^0\,36'\,28'',21$,	$\beta'' = 47^0\,44'\,22'',57$
$\alpha'' = 30$	$\alpha_{,}'' = 204\;31\;40,54$,	$\alpha_{''}' = 270\;\;9\;36,04$
$\alpha' = 108$	$\alpha_{,} = 147\;57\;28,19$,	$\alpha_{''} = 317\;47\;15,63$
$n = 78$	$n' = 56\;34\;12,35$,	$n'' = 47\;37\;39,59$
$\sigma = 20\;\;2'\,24'',41$,	$\sigma' = 17$	$\sigma'' = 15$
$\lambda = 15\;41\;\;4,91$,	$\lambda' = 24\;25\;28,61$,	$\lambda'' = 8\;44\;23,70$

Hiernach kann dieses Dreieck leicht construirt werden.

77.

Im soeben berechneten sphäroidischen Dreieck lagen beide gegebene Seiten auf derselben Seite des Meridians ihres Durchschnittspunkts, hier soll noch ein Beispiel gegeben werden, in welchem diese Dreiecksseiten auf verschiedenen Seiten des genannten Meridians liegen, um auf die Umstände aufmerksam zu machen die in diesem Falle vorkommen.

Gegeben seien die eine Dreiecksseite $= 4^0$ mit dem Azimuth $= 10^0$, die andere Dreiecksseite $= 3^0\,30'$ mit dem Azimuth $= 300^0$, nebst der reducirten Breite des Durchschnittspunkts $= 30^0$.

Mit den gegebenen Stücken

$$\beta' = 30^0\,, \quad \alpha' = 10^0\,, \quad \sigma = 4^0$$

und mit Anwendung von höchstens siebenstelligen Logarithmen, und den Reihen des Art. 31 giebt die Aufgabe des ersten Abschnittes

$$\beta'' = 26^0\,2'\,53'',621\;, \quad \alpha'' = 9^0\,38'\,9'',136\;, \quad \lambda = 0^0\,46'\,21'',058$$

Im zweiten Theile der Rechnung wende ich statt des Azimuths selbst die Ergänzung desselben zu 360^0 an, und stelle also die gegebenen Stücke wie folgt,

$$\beta' = 30^0\,, \quad \alpha' = 60^0\,, \quad \sigma = 3^0\,30'$$

womit auf dieselbe Weise wie vorher sich

$$\beta'' = 28^0\,12'\,2'',237\;, \quad \alpha'' = 58^0\,19'\,20'',909\;, \quad \lambda = 3^0\,26'\,21'',377$$

ergiebt. Es ist nun hiebei zur Verbindung dieses Resultats mit dem des ersten Theils der Rechnung nichts weiter zu bemerken als dass man die beiden Azimuthe und den Längenunterschied als negativ betrachten



muss; es wird daher namentlich das wahre Azimuth des Endpunkts der zweiten geodätischen Linie nicht $180^0+\alpha''$, sondern $180^0-\alpha''$, und für den dritten Theil der Rechnung müssen die beiden Längenunterschiede addirt werden. Stellt man für diesen die gegebenen Stücke wie folgt,

$$\beta' = 28^0 12' 2'',237\ ,\quad \beta'' = 26^0 2' 53'',621\ ,\quad \lambda = 4^0 12' 42'',435$$

so ist λ positiv zu nehmen, und man bekommt die Azimuthe in ihrer ursprünglichen Richtung. Die Aufgabe dieses Abschnitts giebt, mit Anwendung der Reihen des Art. 59

$$\alpha' = 61^0 10' 38'',279\ ,\quad \alpha'' = 59^0 15' 3'',306\ ,\quad \sigma = 4^0 19' 9'',248$$

Um den Bogen K' des eben angeführten Art. möglichst genau zu erhalten habe ich mich bei der Berechnung desselben zehnstelliger Logarithmen bedient. Der Unterschied in dem Werthe desselben, welcher durch Anwendung von siebenstelligen Logarithmen und Durchführung der achten Stelle in den Interpolationen ergiebt, beträgt jedoch nur 0",008.

Die Zusammenstellung des jetzt berechneten sphäroidischen Dreiecks in der oben dafür eingeführten Bezeichnung giebt nun

$\beta =$	$28^0 12'\ 2'',237$,	$\beta' =$	30^0 ,	$\beta'' =$	$26^0\ 2' 53'',621$
$\alpha'' =$	121 40 39,091,	$\alpha_{,} =$	10 ,	$\alpha_{,,} =$	189 38 9, 136
$\alpha' =$	61 10 38,279,	$\alpha_{,}'' =$	300 ,	$\alpha_{,,}' =$	239 15 3, 306
$n =$	60 30 0,812,	$n' =$	70 ,	$n'' =$	49 36 54, 170
$\sigma =$	4 ,	$\sigma' =$	$4\ 19'\ 9'',248$,	$\sigma'' =$	3 30
$\lambda =$	0 46 21,058,	$\lambda' =$	4 12 42, 435,	$\lambda'' =$	3 26 21, 377

Dritter Abschnitt.

78.

Da die in einem Dreiecksnetz beobachteten, oder gemessenen, Winkel, wenngleich mit der grössten Sorgfalt und Umsicht verfahren, und die besten Instrumente angewendet worden sind, dennoch keine absolute Genauigkeit besitzen, sondern mit kleinen Fehlern behaftet sind, so sind vor Allem diese Fehler auf eine angemessene Art auszugleichen, und dadurch das Dreiecksnetz zu weiterer Verarbeitung vorzubereiten. Die Grundsätze nach welchen diese Ausgleichung erfolgen muss, können zufolge des jetzigen Standes der Wissenschaft nur die folgenden sein:

1) müssen die Winkel so ausgeglichen werden, dass allen geometrischen (oder trigonometrischen) Bedingungen, die im Dreiecksnetze vorhanden sind, Gnüge geleistet werde, und ausserdem muss

2) diese Ausgleichung so beschaffen sein, dass die Summe der mit ihren bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der Fehler der Winkelmessungen, die hierauf noch übrig bleiben, ein Minimum werde.

Diese Aufgabe ist immer bestimmt, und zuerst von Gauss und Bessel fast zu gleicher Zeit, von Gauss jedoch ausführlicher, gelöst. Es ist nicht meine Absicht hier näher auf die Auflösung dieser Aufgabe einzugehen, sondern es soll nur in Betracht gezogen werden, wie verfahren werden muss um den trigonometrischen Bedingungen des Dreiecksnetzes mit Sicherheit zu gnügen. Da die Dreieckswinkel auf der Oberfläche der Erde liegen, und die Grundlinien, die man misst um die absolute Länge der Dreiecksseiten zu erhalten, jedenfalls als geodätische Linien betrachtet werden können, so besteht jedes durch die Messungen erhaltene Dreiecksnetz aus sphäroidischen Dreiecken, und die trigonometrischen Bedingungen, die zur Ausgleichung erforderlich sind, müssen der sphäroidischen Trigonometrie entnommen werden.

Hiebei kommt der günstige Umstand in Betracht, dass alle Dreiecke, die unmittelbar gemessen werden können, in Bezug auf die Erdoberfläche und den Umkreis derselben sehr klein sind, und daher diese Dreiecksseiten als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden können. Dieser Umstand veranlasst, dass alle wirklich gemessenen Dreiecke auf einfache Weise vom Ellipsoid auf die Kugel, und von der Kugel auf die Ebene reducirt werden können. Diese Reductionen können auf viele verschiedene Arten ausgeführt werden, z. B. durch Projectionen, denen irgend ein Gesetz zu Grunde gelegt worden ist, aber unter allen möglichen Verfahrungsarten verdient dasjenige bei Weitem den Vorzug, welches die Seiten der sphäroidischen Dreiecke unverändert lässt, und alle erforderlichen Correctionsglieder auf die Winkel überträgt.

Im Art. 40 wurde gezeigt, dass man die geodätischen Azimuthe oder überhaupt Winkel nicht unmittelbar durch die Beobachtungen erhält, und es sind daher vor Allem die unmittelbar erhaltenen astronomischen Azimuthe und Winkel durch die erste Gleichung (53) auf die entsprechenden geodätischen hinzuführen. Die fernere Reduction vom

Ellipsoid auf die Kugel, und von dieser auf die Ebene wird in diesem Abschnitte entwickelt werden.

Nachdem durch dieses Verfahren die Winkel der sphäroidischen Dreiecke auf die Winkel ebener Dreiecke hingeführt worden sind, muss man sich zur Aufstellung und Anwendung der Bedingungen des Dreiecksnetzes der ebenen Trigonometrie bedienen, und nach ausgeführter Ausgleichung bringt man durch entgegengesetzte Anwendung der vorher schon angebrachten Correctionen die ausgeglichenen Winkel auf die sphäroidischen, oder geodätischen zurück.

Die Hinführung eines kleinen sphärischen Dreiecks auf ein ebenes von gleichen Seiten ist zuerst in ihrem grössten Theile von Legendre gegeben, und sein Resultat unter dem Namen des Legendre'schen Satzes Jedem bekannt. Später hat man diesen Satz weiter ausgeführt, und Glieder höherer Ordnung desselben entwickelt.

Ein Ausdruck für die Reduction eines aus geodätischen Linien geformten Dreieckes auf dem Revolutionsellipsoid auf eins von gleichen Seiten auf der Kugel ist von Bessel aufgestellt*), aber nie von ihm bewiesen worden; wenigstens habe ich in seinen Schriften keinen Beweis davon auffinden können, und es ist mir auch nicht bekannt, dass irgend ein Anderer eine Ableitung desselben veröffentlicht hätte. Dieser Bessel'sche Ausdruck, welcher übrigens durch einige Schreib- oder Druckfehler etwas entstellt ist, betrachtet die Seiten des Dreiecks nicht als kleine Grössen der ersten Ordnung, sondern als geodätische Linien von beliebiger Länge, übrigens enthält er nur die mit e^2 multiplicirten Glieder. Die zuletzt genannte Beschränkung ist, wie man weiter unten sehen wird, für die Anwendung von geringem Belang, wenn eine übrigens zweckmässige Anwendung davon gemacht wird, aber der Ausdruck ist so zusammengesetzt, dass man ihn schwerlich wird fortwährend anwenden können, und es scheint nicht, dass er sich ohne Beschränkung seiner Ausdehnung vereinfachen lassen könnte. Bessel hat a. a. O. eine Abkürzung desselben abgeleitet, die für Dreiecke von kleinen Seiten gelten soll, und ihn sehr vereinfacht, aber auch kaum eine sichere Anwendung zulässt. Wäre er bei dieser Abkürzung nur Einen Schritt weiter gegangen, und hätte auch die Glieder fünfter Ordnung berücksichtigt, während er nur die Glieder vierter Ordnung aufnimmt,

*) S. Schum. Astr. Nachr. No. 6.

so wäre er auf einen auch einfachen Ausdruck von sicherer Anwendbarkeit gekommen; dieses ist aber von ihm nicht geschehen. Es werden in diesem Abschnitt drei ähnliche Ausdrücke abgeleitet, und daraus für kleine sphäroidische Dreiecke drei einfache Ausdrücke erhalten, die bis auf Grössen sechster Ordnung richtig sind.

Die Verschiedenheit der astronomischen und der geodätischen Azimuthe und Winkel überhaupt ist schon längst erkannt worden, und man hat ihre Unterschiede mit grösserer oder geringerer Genauigkeit ausgedrückt. Bessel hat dieselben durch einen Ausdruck angegeben*), der mit der obigen ersten Gleichung (52) für identisch zu erachten ist, und von diesem Ausdruck hat er auch später eine Ableitung veröffentlicht**). Die zweite und dritte der Gleichungen (52) habe ich nirgends abgeleitet, oder angeführt gefunden, und dasselbe muss ich auch von den Fundamentalgleichungen sagen, aus welchen ich sie abgeleitet habe.

In seiner Theorie der krummen Oberflächen***) hat Gauss die Hinführung eines sphäroidischen Dreiecks auf ein ebenes, dessen Seiten dieselben Längen haben, mit weit grösserer Allgemeinheit ausgeführt, indem er zwar annimmt, dass die Dreiecksseiten kleine Grössen erster Ordnung seien, aber die Oberfläche, auf welcher das sphäroidische Dreieck gebildet ist, gänzlich unbestimmt lässt, so dass seine Auflösung auf jede beliebige Oberfläche angewandt werden kann. Diese Auflösung, so sinnreich und elegant sie auch ist, scheint mir dennoch etwas zu wünschen übrig zu lassen. Erstlich ist sie etwas complicirt, und dabei sind die Erklärungen so kurz gehalten, dass man nicht ohne Mühe zur vollständigen Einsicht in alle Theile derselben gelangt und zweitens möchte man wünschen, dass die Reihen weiter entwickelt worden wären, damit ihre Anwendung eine ausgedehntere würde, da die Gaussischen Endformeln doch nur auf sehr kleine Dreiecke angewandt werden können. Seine Entwickelungen gehen freilich alle eine Ordnung weiter wie seine Endformeln, aber wenn man diese Glieder zuziehen will, so stösst man drittens auf eine Lücke, denn man bedarf dazu der geometrischen Bedeutung der Coefficienten, die er mit f^0, f', f'', g^0, g', h^0 bezeichnet hat, und diese ist in der Abhandlung

*) Schum. Astr. Nachr. No. 3.

**) Schum. Astr. Nachr. B. XIV No. 330.

***) Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas. Göttingae 1828.

nicht gegeben; diese Coefficienten werden blos als die der Entwickelung der Function, die er mit n bezeichnet, nach den Potenzen von p und q definirt, und ihren Zusammenhang mit der Gleichung der Oberfläche lässt er unerörtert.

Durch diese Umstände veranlasst hielt ich nicht für überflüssig eine neue Herleitung der Ausdrücke, auf welche diese Aufgabe führt, zu versuchen, und die gefundene diesem Abschnitte einzuverleiben. Sie stellt die Endformeln alle durch Functionen dar, deren Coefficienten man unmittelbar durch gewisse Differentiationen aus der Gleichung der Oberfläche erhält, so dass die Anwendung auf jede beliebige Oberfläche ohne Weiteres ausgeführt werden kann. Die Anwendung meiner Endformeln auf das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität ist beigefügt, und durch Beispiele erläutert.

Der Gang meiner Auflösung ist ein ganz anderer, wie der der Gaussischen. Ich wende um sie zu erhalten keine weiteren Grundgleichungen an, wie den schon im ersten Abschnitte abgeleiteten Ausdruck $dh^2 + m^2 dq^2$ des Quadrats des Linearelements auf irgend einer Oberfläche, und die dazu gehörige Bedingungsgleichung für die kürzeste Linie auf derselben Oberfläche, während Gauss zwei solcher Formen braucht, nämlich in seinen Bezeichnungen $dr^2 + m^2 d\varphi^2$ und $n^2 dp^2 + dq^2$ nebst den dazu gehörigen Bedingungsgleichungen der kürzesten Linie. Die Einführung des Krümmungsmaasses der Oberfläche, in dem Sinne, in welchem es Gauss in der genannten Abhandlung zuerst aufgestellt hat, ist auch in der ausgedehnteren, neuen Auflösung von wesentlichem Nutzen gewesen.

Es ist noch eines wichtigen Umstandes zu erwähnen, welcher in dieser Aufgabe, wenigstens bei ihrer Anwendung auf das Ellipsoid von kleiner Excentricität, und wahrscheinlich bei jeder Anwendung derselben mehr oder weniger, eintritt. Man wird weiter unten sehen, dass in den hier abgeleiteten Endformeln für das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität nicht nur die Glieder vierter und fünfter, sondern auch zum Theil die sechster und siebenter Ordnung nicht von einander getrennt vorkommen, sondern in einander geflochten sind, indem sie sich auf verwandte Formen hinführen liessen. Jede dieser beiden Gruppen bilden Glieder, deren Werthe in der Regel bedeutend abnehmen, mit anderen Worten, die Summe der Glieder vierter und fünfter Ordnung ist gemeiniglich weit grösser wie die Summe der Glieder sechster und sie-

benter Ordnung, und es kann voraus gesehen werden, dass dieses bei den Gliedern höherer Ordnungen in ähnlicher Weise stattfinden wird, wenn nur nicht Dreiecke von allzugrossen Seiten gewählt werden. Anders verhält es sich aber mit den Gliedern, aus welchen jede dieser Gruppen bestehen, die Glieder fünfter Ordnung sind nicht unbedingt kleiner wie die Glieder vierter Ordnung, sie können vielmehr grösser werden wie diese, und ebenso können die Glieder siebenter Ordnung grösser werden wie die der sechsten. Besonders bemerklich ist, dass diese Glieder selbst wandelbare, aber ihre Summen feste, Werthe annehmen, und man kann ganz kleine Dreiecke angeben, für welche dieses schon der Fall ist. Es folgt hieraus, dass die Erweiterung der Gaussischen Endformeln, die bei ihrer Anwendung auf das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität die Glieder der vierten und der fünften Ordnung enthalten würden, auf Glieder sechster Ordnung von gar keinem Nutzen gewesen wäre, sondern dass es nothwendig auch der Entwickelung der Glieder siebenter Ordnung bedurfte um Formeln zu erhalten, die wesentlich grössere Genauigkeit gewähren. Durch Ausdehnung der Entwickelungen bis auf diese Grenze gelangte ich zu Ausdrücken, die auf die Auflösung von sphäroidischen Dreiecken angewandt werden können, deren Seiten bis 20^0 lang sind.

Den vorstehenden Erklärungen zufolge bin ich also allenthalben in dieser Aufgabe Eine Ordnung weiter gegangen wie Gauss im Allgemeinen, und zwei Ordnungen weiter wie Gauss in seinen Endformeln. Meine allgemeinen Endformeln sind bis auf Grössen der sechsten Ordnung vollständig, und bei der Anwendung derselben auf das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität folgen daraus Endformeln, die bis auf Grössen achter Ordnung vollständig sind.

79.

Nehmen wir zuerst die Reduction des sphärischen Dreiecks auf ein ebenes von gleichen Seiten vor. Die Seiten dieser beiden Dreiecke, die wir uns vorläufig in Theilen des Kugelhalbmessers ausgedrückt denken wollen, sollen mit a, b, c, die Winkel des sphärischen Dreiecks mit A, B, C, und die des ebenen Dreiecks mit $A+\Delta A$, $B+\Delta B$, $C+\Delta C$ bezeichnet werden. Die Trigonometrie giebt hierauf die beiden folgenden Gleichungen

(95) . . $\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$

$$bc \cos(A + \varDelta A) = -\tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} c^2$$

Die Entwickelung der zweiten in Bezug auf $\varDelta A$, und die Vergleichung derselben mit der ersten führt auf die folgende

$$\sin b \sin c \sin A . \varDelta A + \tfrac{1}{2} \sin b \sin c \cos A . \varDelta A^2 = K$$

wenn

$$K = \cos a - \cos b \cos c + (a^2 - b^2 - c^2) \frac{\sin b \sin c}{2bc}$$

gesetzt wird. Aus den Reihen

$$\sin a = a\left(1 - \tfrac{1}{6} a^2 + \tfrac{1}{120} a^4 \mp . .\right)$$

$$\cos a = 1 - \tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{24} a^4 - \tfrac{1}{720} a^6 \pm \ldots$$

folgt aber leicht, wenn man sie auf b und c anwendet,

$$\cos b \cos c = 1 - \tfrac{1}{2} b^2 - \tfrac{1}{2} c^2 + \tfrac{1}{24} b^4 + \tfrac{1}{4} b^2 c^2 + \tfrac{1}{24} c^4$$
$$- \tfrac{1}{720} b^6 - \tfrac{1}{48} b^4 c^2 - \tfrac{1}{48} b^2 c^4 - \tfrac{1}{720} c^6$$

$$\frac{\sin b \sin c}{bc} = 1 - \tfrac{1}{6} b^2 - \tfrac{1}{6} c^2 + \tfrac{1}{120} b^4 + \tfrac{1}{36} b^2 c^2 + \tfrac{1}{120} c^4$$

woraus

$$K = \tfrac{1}{24} a^4 - \tfrac{1}{12} a^2 b^2 - \tfrac{1}{12} a^2 c^2 + \tfrac{1}{24} b^4 - \tfrac{1}{12} b^2 c^2 + \tfrac{1}{24} c^4$$
$$- \tfrac{1}{720} a^6 + \tfrac{1}{240} a^2 b^4 + \tfrac{1}{72} a^2 b^2 c^2 + \tfrac{1}{240} a^2 c^4$$
$$- \tfrac{1}{360} b^6 + \tfrac{1}{360} b^4 c^2 + \tfrac{1}{360} b^2 c^4 - \tfrac{1}{360} c^6$$

folgt. Die Gleichung (95) giebt aber

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

die durch die Substitution der obigen Reihen in

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = -\tfrac{1}{4} a^4 + \tfrac{1}{2} a^2 b^2 + \tfrac{1}{2} a^2 c^2 - \tfrac{1}{4} b^4 + \tfrac{1}{2} b^2 c^2 - \tfrac{1}{4} c^4$$
$$+ \tfrac{1}{24} a^6 - \tfrac{1}{24} a^4 b^2 - \tfrac{1}{24} a^4 c^2 - \tfrac{1}{24} a^2 b^4 - \tfrac{1}{4} a^2 b^2 c^2 - \tfrac{1}{24} a^2 c^4$$
$$+ \tfrac{1}{24} b^6 - \tfrac{1}{24} b^4 c^2 - \tfrac{1}{24} b^2 c^4 + \tfrac{1}{24} c^6$$

übergeht, und die Division des vorstehenden Ausdrucks von K durch diesen giebt

$$K = -\tfrac{1}{6} \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A \left\{1 + \tfrac{2}{15} a^2 + \tfrac{1}{10} b^2 + \tfrac{1}{10} c^2\right\}$$

Da nun in dem mit $\varDelta A^2$ multiplicirten Gliede des oben für $\varDelta A$ erhaltenen Ausdrucks die Substitution

$$\sin b \sin c \cos A = -\tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} c^2$$

ausreichend genau ist, so erhält man

$$\sin b \sin c \sin A . \varDelta A - \tfrac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2) \varDelta A^2$$
$$= -\tfrac{1}{6} \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A \left\{1 + \tfrac{2}{15} a^2 + \tfrac{1}{10} b^2 + \tfrac{1}{10} c^2\right\}$$

woraus auf bekannte Art

$$\varDelta A = -\tfrac{1}{6} \sin b \sin c \sin A \left\{1 + \tfrac{11}{120} a^2 + \tfrac{17}{120} b^2 + \tfrac{17}{120} c^2\right\}$$

folgt.

80.

Um den eben erhaltenen Ausdruck für $\varDelta A$ von der Fläche des sphärischen Dreiecks abhängig zu machen, gehe ich von der bekannten Gleichung

$$A + B + C = 180^0 + \Delta$$

aus, in welcher diese Fläche mit Δ bezeichnet ist. Setzt man

$$A_0 + B + C = 180^0$$

so wird $A = A_0 + \Delta$, und

$$\sin A = \sin A_0 + \Delta \cos A_0 - \tfrac{1}{2} \Delta^2 \sin A_0$$

$$\cos A = \cos A_0 - \Delta \sin A_0 - \tfrac{1}{2} \Delta^2 \cos A_0$$

Die trigonometrische Gleichung

$$\cos b \sin A \sin C = \cos B + \cos A \cos C$$

wird hiedurch

$$\cos b\left(1 + \Delta \frac{\cos A_0}{\sin A_0} - \tfrac{1}{2} \Delta^2\right) = 1 - \Delta \frac{\cos C}{\sin C} - \tfrac{1}{2} \Delta^2 \frac{\cos A_0 \cos C}{\sin A_0 \sin C}$$

deren Entwickelung bis auf Grössen sechster Ordnung

$$\cos b = 1 - \Delta \frac{\sin B}{\sin A_0 \sin C} + \tfrac{1}{2} \Delta^2 \frac{\cos B}{\sin A_0 \sin C} + \Delta^2 \frac{\cos A_0 \sin B}{\sin^2 A_0 \sin C}$$

giebt. Es wird also auch

$$\sin^2 b = 2\Delta \frac{\sin B}{\sin A_0 \sin C}\left\{1 - \tfrac{1}{2} \Delta \frac{\cos B}{\sin B} - \Delta \frac{\cos A_0}{\sin A_0} - \tfrac{1}{2} \Delta \frac{\sin B}{\sin A_0 \sin C}\right\}$$

und eliminirt man hieraus Δ innerhalb der Klammern durch die bis auf Grössen vierter Ordnung richtigen Gleichungen

$$\Delta = \tfrac{1}{2} ac \sin B = \tfrac{1}{2} bc \sin A_0 = \tfrac{1}{2} b^2 \frac{\sin A_0 \sin C}{\sin B}$$

und $\cos B$ nebst $\cos A_0$ durch

$$ac \cos B = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$$

$$bc \cos A_0 = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$$

dann ergiebt sich

$$\sin^2 b = 2\Delta \frac{\sin B}{\sin A_0 \sin C}\left\{1 + \frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}b^2 - \frac{3}{8}c^2\right\}$$

und ebenso, oder durch blose Vertauschung der Buchstaben wird

$$\sin^2 c = 2\Delta \frac{\sin C}{\sin A_0 \sin B}\left\{1 + \frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}b^2 - \frac{3}{8}c^2\right\}$$

Diese beiden Gleichungen geben

$$\sin b \sin c \sin A_0 = 2\Delta \left\{1 + \frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}b^2 - \frac{3}{8}c^2\right\}$$

aber

$$\sin b \sin c \sin A_0 = \sin b \sin c \sin A - \Delta bc \cos A_0$$
$$= \sin b \sin c \sin A + \frac{1}{2}\Delta (a^2 - b^2 - c^2)$$

und folglich wird

$$\sin b \sin c \sin A = 2\Delta \left\{1 - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{8}c^2\right\}$$

Hiemit kann man Δ in den im vor. Art. erhaltenen Ausdruck für $\varDelta A$ einführen, und durch Vertauschung der Buchstaben erhält man hierauf ähnliche Ausdrücke für $\varDelta B$ und $\varDelta C$. Nehmen wir jetzt an, dass diese Ausdrücke die Winkeländerungen in Secunden angeben sollen, so muss Δ auch in Secunden ausgedrückt werden, und nimmt man ferner an, dass die Dreiecksseiten in irgend einem Linearmaasse ausgedrückt seien, so muss man sie mit dem in demselben Maasse auszudrückenden Halbmesser der Kugel, den ich mit R bezeichnen werde, dividiren. Die Ausdrücke für $\varDelta A$, $\varDelta B$, $\varDelta C$ werden demnach die folgenden

$$(96) \quad . \quad \left\{\begin{array}{l} \varDelta A = -\frac{1}{8}\Delta \left\{1 - \frac{a^2}{80R^2} + \frac{b^2}{60R^2} + \frac{c^2}{60R^2}\right\} \\ \varDelta B = -\frac{1}{3}\Delta \left\{1 + \frac{a^2}{60R^2} - \frac{b^2}{30R^2} + \frac{c^2}{60R^2}\right\} \\ \varDelta C = -\frac{1}{8}\Delta \left\{1 + \frac{a^2}{60R^2} + \frac{b^2}{60R^2} - \frac{c^2}{80R^2}\right\} \end{array}\right.$$

Lässt man hierin die Grössen vierter Ordnung weg, so entsteht daraus der bekannte Legendre'sche Satz, und ausserdem bekommt man aus denselben

$$\varDelta A + \varDelta B + \varDelta C = -\Delta$$

welche Gleichung sich von selbst versteht.

81.

Wenn die Dreiecke nicht grösser sind, als dass man in den Ausdrücken (96) mit den Gliedern niedrigster (zweiter) Ordnung ausreicht, so ist es auch ausreichend

$$\Delta = r\frac{bc}{2R^2}\sin A, \text{ oder } = r\frac{ac}{2R^2}\sin B, \text{ oder } = r\frac{ab}{2R^2}\sin C$$

zu setzen, wo wieder $r = 206265''$ ist, sind aber die Dreiecke so gross, dass die Glieder vierter Ordnung der Ausdrücke (96) merklich werden, so muss Δ, um die zu erreichende Genauigkeit nicht illusorisch zu machen, genauer berechnet werden.

Ich will hievon Gelegenheit nehmen die einfachen und strengen Ausdrücke für den sphärischen Ueberschuss, die man immer noch selten in den Handbüchern findet, auf kurze Weise abzuleiten. Nehmen wir wieder die Gleichung

$$A + B + C = 180^0 + \Delta$$

vor, dann kann man die allbekannten Gleichungen, die dazu dienen um aus den gegebenen Winkeln eines sphärischen Dreiecks die Seiten zu erhalten, wie folgt stellen,

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \sin A\sin B\sin^2\tfrac{1}{2}c$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C) = \sin A\sin C\sin^2\tfrac{1}{2}b$$

$$\sin B\sin C\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C)$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen, Seite für Seite, mit einander, so erhält man, nach Ausziehung der Quadratwurzel aus dem Produkt sogleich

$$\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\sin A \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

die nach der Division durch $\cos\frac{1}{2}a$ schon eine einfache und strenge Formel zur Berechnung des sphärischen Ueberschusses wird. Sie ist indes nicht allgemein anwendbar, da sie in den Fällen, in welchen sich Δ nicht sehr weit von 180^0 entfernt, nur wenig genaue Resultate geben kann. Man kann sie aber durch die folgende Umformung auf alle Fälle anwendbar machen. Sie giebt zuerst

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos^2\tfrac{1}{2}a - \sin^2\tfrac{1}{2}b\sin^2\tfrac{1}{2}c\sin^2 A$$

deren rechte Seite durch Zuziehung der Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

zu einem vollkommenen Quadrat gemacht werden kann. Diese letztere verwandelt man leicht in

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \cos^2 \tfrac{1}{2} b \cos^2 \tfrac{1}{2} c + \sin^2 \tfrac{1}{2} b \sin^2 \tfrac{1}{2} c$$
$$+ 2 \sin \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} \sin b \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c \cos A$$

und eliminirt man hiemit $\cos^2 \frac{1}{2} a$ aus der rechten Seite der vorhergehenden, so ergiebt sich nach der Ausziehung der Quadratwurzel

(98) $$\cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} \Delta = \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c + \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos A$$

Die Division der (97) durch diese giebt

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Delta = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \sin A}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cos A}$$

die in allen Fällen ein möglichst genaues Resultat gewährt, und sich überdies in eine, nach einem sehr einfachen Gesetz fortschreitende Reihe auflösen lässt, von welcher jedoch hier abgesehen werden soll. Es giebt aber noch eine einfachere Formel für die Berechnung von Δ, die sich aus den vorhergehenden auf folgende Weise ableiten lässt.

Eliminirt man A aus der (97) durch die folgenden bekannten Gleichungen

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}, \quad \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}$$

wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist, so ergiebt sich

(99) . . $$\cos \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} \Delta = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$$

eliminirt man auf gleiche Weise auch A aus der (98), so wird

$$\cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} \Delta = \cos \tfrac{1}{2} (b+c) + \frac{\sin s \sin (s-a)}{2 \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$$

und durch Hülfe der identischen Gleichungen

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{4} \Delta = \cos \tfrac{1}{2} \Delta + 1$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a + \cos \tfrac{1}{2} (b+c) = 2 \cos \tfrac{1}{2} s \cos \tfrac{1}{2} (s-a)$$

entsteht hieraus

$$\cos\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{4}\Delta = \frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)$$

Es sind aber auch

$$\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}b \quad \cos\frac{1}{2}c &= \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(b-c)\\
\sin\frac{1}{2}s \quad \sin\frac{1}{2}(s-a) &= \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(b+c)\\
\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c) &= \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(b-c)
\end{aligned}$$

identische Gleichungen, und vergleicht man diese mit dem vorstehenden Ausdruck für $\cos\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{4}\Delta$, so wird man ohne Weiteres gewahr, dass daraus

$$\cos\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{4}\Delta = \frac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

folgt. Dividirt man die (99) mit dieser, so ergiebt sich schliesslich durch eine einfache Reduction

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\Delta = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}s\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-c)} \qquad (100)$$

die auch stets sicher angewandt werden kann.

82.

In der Geodäsie wird man wohl selten in die Nothwendigkeit versetzt werden, von den eben abgeleiteten Formeln zur Berechnung des sphärischen Ueberschusses Gebrauch machen zu müssen, sondern sich in den Fällen, in welchen die zu Anfang des vor. Art. angeführten Näherungsformeln nicht ausreichend befunden werden sollten, mit einem Ausdruck begnügen können, welcher denselben Grad der Genauigkeit besitzt, wie die Ausdrücke (96), mit anderen Worten, welcher bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist. Einen solchen kann man leicht aus der Gleichung (97) ableiten, und es macht wenig Mühe in demselben auch die Glieder sechster Ordnung mit aufzunehmen, weshalb dieses hier geschehen soll. Bekannte Reihen sind

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}b\left(1 - \tfrac{1}{24}b^2 + \tfrac{1}{1920}b^4\right)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}c\left(1 - \tfrac{1}{24}c^2 + \tfrac{1}{1920}c^4\right)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}a = 1 - \tfrac{1}{8}a^2 + \tfrac{1}{384}a^4$$

wenn man der Kürze wegen den Divisor R und dessen Potenzen weglässt, die schliesslich leicht hinzugefügt werden können. Multiplicirt man die beiden ersten Reihen mit einander, und dividirt das Produkt mit der dritten, so bekommt man in Folge der (97)

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \tfrac{1}{4}bc\sin A\left\{1 + \tfrac{1}{8}a^2 - \tfrac{1}{24}b^2 - \tfrac{1}{24}c^2 + \tfrac{5}{384}a^4 - \tfrac{1}{192}a^2b^2 - \tfrac{1}{192}a^2c^2 + \tfrac{1}{1920}b^4 + \tfrac{1}{576}b^2c^2 + \tfrac{1}{1920}c^4\right\}$$

Aber mit hier hinreichender Genauigkeit ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{48}\Delta^3$$

und

$$\Delta^3 = \tfrac{1}{8}b^3c^3\sin^3 A = \tfrac{1}{2}bc\sin A\left(\tfrac{1}{2}bc\sin A\right)^2$$

Eliminirt man hier die Function innerhalb der Klammern durch die Gleichung

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

so wird

$$\Delta^3 = \tfrac{1}{2}bc\sin A\left\{-\tfrac{1}{16}a^4 + \tfrac{1}{8}a^2b^2 + \tfrac{1}{8}a^2c^2 - \tfrac{1}{16}b^4 + \tfrac{1}{8}b^2c^2 - \tfrac{1}{16}c^4\right\}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in den für $\sin\frac{1}{2}\Delta$, und die Ergänzung der oben ausgelassenen Divisoren giebt sogleich

$$\Delta = \tfrac{1}{2}bc\sin A\left\{1 + \frac{a^2}{8R^2} - \frac{b^2}{24R^2} - \frac{c^2}{24R^2} + \frac{a^4}{96R^4} - \frac{b^4}{480R^4} + \frac{b^2c^2}{144R^4} - \frac{c^4}{480R^4}\right\}$$

woraus durch die Vertauschung der Buchstaben die folgenden hervorgehen:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ac\sin B\left\{1 - \frac{a^2}{24R^2} + \frac{b^2}{8R^2} - \frac{c^2}{24R^2} - \frac{a^4}{480R^4} + \frac{b^4}{96R^4} + \frac{a^2c^2}{144R^4} - \frac{c^4}{480R^4}\right\}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ab\sin C\left\{1 - \frac{a^2}{24R^2} - \frac{b^2}{24R^2} + \frac{c^2}{8R^2} - \frac{a^4}{480R^4} - \frac{b^4}{480R^4} + \frac{a^2b^2}{144R^4} + \frac{c^4}{96R^4}\right\}$$

Diese Ausdrücke sind bis auf Grössen achter Ordnung genau, und es ist in denselben vorausgesetzt dass Δ in demselben Linearmaasse ausgedrückt werde wie die Dreiecksseiten.

83.

Mit Uebergehung der Glieder sechster Ordnung lässt sich hieraus noch ein Ausdruck für Δ ableiten, welcher sich besonders zur Anwendung eignet. Setzt man zur Abkürzung, und um Δ in Secunden ausgedrückt zu erhalten

$$(\Delta a) = \frac{r}{2R^2} bc \sin A$$

und nimmt auf die folgenden Ausdrücke, die bis auf Grössen vierter Ordnung richtig sind, Bedacht

$$\frac{a^2}{R^2} = \frac{2(\Delta a)\sin A}{r \sin B \sin C}; \quad \frac{b^2}{R^2} = \frac{2(\Delta a)\sin B}{r \sin A \sin C}; \quad \frac{c^2}{R^2} = \frac{2(\Delta a)\sin C}{r \sin A \sin B}$$

so wird der erste der Ausdrücke für Δ des vor. Art.

$$\Delta = (\Delta a) + \frac{(\Delta a)^2}{12r} \cdot \frac{3\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C}{\sin A \sin B \sin C}$$

Da aber jetzt in den Gliedern vierter Ordnung

$$A + B + C = 180^0$$

gesetzt werden darf, so wird, wie leicht zu beweisen ist,

$$\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = -2\cos A \sin B \sin C$$

und man bekommt folglich

$$\Delta = (\Delta a) + \frac{(\Delta a)^2}{6r}\frac{\sin A}{\sin B \sin C} - \frac{(\Delta a)^2}{6r}\operatorname{cotg} A$$

zur Anwendung in den Ausdrücken (96) hinreichend genau, da er bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist. Durch die Vertauschung der Buchstaben erhält man hieraus die folgenden

$$(\Delta b) = \frac{r}{2R^2} ac \sin B$$

$$\Delta = (\Delta b) + \frac{(\Delta b)^2}{6r}\frac{\sin B}{\sin A \sin C} - \frac{(\Delta b)^2}{6r}\operatorname{cotg} B$$

und

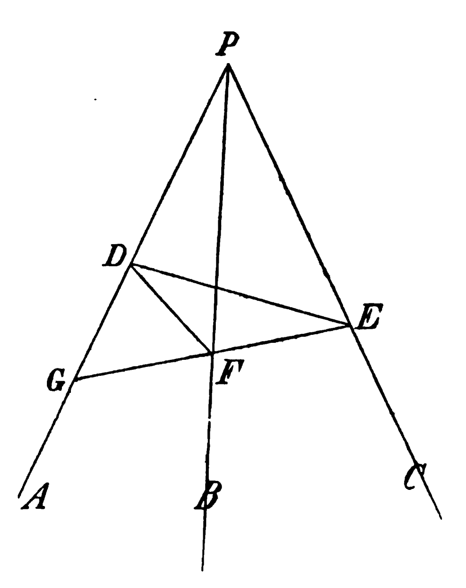
$$(\Delta c) = \frac{r}{2R^2} ab \sin C$$

$$\Delta = (\Delta c) + \frac{(\Delta c)^2}{6r}\frac{\sin C}{\sin A \sin B} - \frac{(\Delta c)^2}{6r}\operatorname{cotg} C$$

Unter diesen drei Systemen von Formeln kann man in der Anwendung beliebig wählen.

84.

Die ähnliche Reduction des sphäroidischen Dreiecks auf dem Revolutionsellipsoid auf das sphärische lässt sich nicht so einfach ausführen, obgleich das Resultat derselben, wenigstens bis auf Grössen sechster Ordnung, sehr einfach ist, und in der Form Aehnlichkeit mit dem vorhergehenden hat.



In der vorstehenden Figur sei P der Nordpol des Ellipsoids, PA, PB, PC drei Meridiane, auf welchen die Ecken des allgemeinen sphäroidischen Dreiecks DEF liegen. Die reducirten Breiten dieser Ecken und die Längenunterschiede derselben seien

$$PD = 90^0 - \beta\ ,\quad APB = \lambda'$$
$$PE = 90^0 - \beta'\ ,\quad BPC = \lambda$$
$$PF = 90^0 - \beta''\ ,\quad APC = \lambda''$$

Die Dreiecksseiten und Winkel seien

$$FE = \sigma\ ,\quad FDE = n$$
$$DF = \sigma'\ ,\quad DEF = n'$$
$$DE = \sigma''\ ,\quad DFE = n''$$

und es wird angenommen, dass diese Seiten in Bogentheilen des Aequators ausgedrückt seien. Die Azimuthe sollen wieder alle vom Südpunkt des Horizonts in einer und derselben Richtung durch den ganzen Um-

kreis gezählt werden, wendet man daher auch in Bezug auf diese die im Art. 76 eingeführte Bezeichnung an, so wird

$$ADF = \alpha', \qquad BFE = \alpha_{''}, \quad FEP + 180^0 = \alpha_{,}$$
$$ADE = \alpha'', \quad DFP + 180^0 = \alpha_{''}', \quad DEP + 180^0 = \alpha_{,}''$$

Man erkennt hierauf leicht aus der Figur dass

$$n = \alpha'' - \alpha'$$
$$n' = \alpha_{,} - \alpha_{,}''$$
$$n'' = \alpha_{''}' - \alpha_{''}$$

so wie

$$\lambda'' = \lambda + \lambda'$$

Die im Vorgehenden eingeführten Hülfsbögen χ und ω sollen auf dieselbe Weise theils ohne Striche, theils mit einem, theils mit zwei Strichen bezeichnet werden. Auch wird jetzt

$$\omega = \lambda + \Delta\omega$$
$$\omega' = \lambda' + \Delta\omega'$$
$$\omega'' = \lambda'' + \Delta\omega''$$

85.

Bildet man nun für je zwei der Dreieckspunkte *DEF* das im Art. 27 eingeführte sphärische Dreieck, so wird man drei sphärische Dreiecke erhalten, in welchen die Seiten und die gegenüber liegenden Winkel die folgenden sind.

$$\text{zu } FPE \text{ gehörig} \begin{cases} 90^0 - \beta'', & 90^0 - \beta', \quad \chi \\ -180^0 + \alpha_{,}, & 180^0 - \alpha_{''}, \quad \omega \end{cases}$$

$$\text{zu } DPF \text{ gehörig} \begin{cases} 90 - \beta, & 90 - \beta'', \quad \chi' \\ -180^0 + \alpha_{''}', & 180^0 - \alpha', \quad \omega' \end{cases}$$

$$\text{zu } DPE \text{ gehörig} \begin{cases} 90^0 - \beta', & 90^0 - \beta, \quad \chi'' \\ 180^0 - \alpha'', & -180^0 + \alpha_{,}'', \quad \omega'' \end{cases}$$

Von den in diesen Dreiecken statt findenden Relationen werden für unsern Zweck die folgenden gebraucht.

$$\begin{aligned}
\sin\chi' \sin\alpha' &= \cos\beta'' \sin\omega' \\
\sin\chi' \cos\alpha' &= -\cos\beta \sin\beta'' + \sin\beta \cos\beta'' \cos\omega' \\
\sin\chi'' \sin\alpha'' &= \cos\beta' \sin\omega'' \\
\sin\chi'' \cos\alpha'' &= -\cos\beta \sin\beta' + \sin\beta \cos\beta' \cos\omega'' \\
\cos\chi' &= \sin\beta \sin\beta'' + \cos\beta \cos\beta'' \cos\omega' \\
\cos\chi'' &= \sin\beta \sin\beta' + \cos\beta \cos\beta' \cos\omega'' \\
\cos\chi &= \sin\beta' \sin\beta'' + \cos\beta' \cos\beta'' \cos\omega
\end{aligned}$$

aus welchen, wegen $n = \alpha'' - \alpha'$ leicht

$$\cos\chi' \cos\chi'' + \sin\chi' \sin\chi'' \cos n = \cos\chi + \cos\beta' \cos\beta'' \{\cos(\omega'' - \omega') - \cos\omega\}$$

folgt. Sei nun

$$\sigma = \chi + \varDelta\sigma\,, \quad \sigma' = \chi' + \varDelta\sigma'\,, \quad \sigma'' = \chi'' + \varDelta\sigma''$$

so ergiebt die oben erhaltene Gleichung

$$\begin{aligned}
&\cos(\sigma' - \varDelta\sigma') \cos(\sigma'' - \varDelta\sigma'') + \sin(\sigma' - \varDelta\sigma') \sin(\sigma'' - \varDelta\sigma'') \cos n \\
&= \cos(\sigma - \varDelta\sigma) + \cos\beta' \cos\beta'' \{\cos(\lambda + \varDelta\omega'' - \varDelta\omega') - \cos(\lambda + \varDelta\omega)\}
\end{aligned}$$

welches eine strenge Relation im allgemeinen sphäroidischen Dreieck ist. Nehmen wir nun ein sphärisches Dreieck an, welches dieselben Seiten wie das sphäroidische, aber die Winkel $n + \varDelta n$, $n' + \varDelta n'$, $n'' + \varDelta n''$ hat, so giebt dieses die Gleichung

$$\cos\sigma' \cos\sigma'' + \sin\sigma' \sin\sigma'' \cos(n + \varDelta n) = \cos\sigma$$

und aus diesen beiden Gleichungen muss der Ausdruck von $\varDelta n$ ermittelt werden.

86.

Entwickelt man die beiden eben gefundenen Gleichungen indem man blos auf die erste Potenz der mit vorgesetztem $\varDelta$ bezeichneten Incremente Rücksicht nimmt, so wird die Gleichung des sphäroidischen Dreiecks

$$\begin{aligned}
&\cos\sigma' \cos\sigma'' + \sin\sigma' \sin\sigma'' \cos n \\
&+ \{\sin\chi' \cos\chi'' - \cos\chi' \sin\chi'' \cos n\}\varDelta\sigma' + \{\cos\chi' \sin\chi'' - \sin\chi' \cos\chi'' \cos n\}\varDelta\sigma'' \\
&= \cos\sigma' + \sin\chi \varDelta\sigma + \cos\beta' \cos\beta'' \sin\omega \{\varDelta\omega + \varDelta\omega' - \varDelta\omega''\}
\end{aligned}$$

da man wegen der Uebergehung der Quadrate der Incremente χ, χ', χ'', ω, bez. statt σ, σ', σ'', λ setzen, und überhaupt die Coefficienten der Incremente so behandeln darf, als gehörten sie dem sphärischen Dreieck an,

welches die Seiten χ, χ', χ'' und die Winkel n, n', n'' hat. Dieses Dreieck giebt aber

$$\sin\chi\cos n'' = \sin\chi'\cos\chi'' - \cos\chi'\sin\chi''\cos n$$
$$\sin\chi\cos n' = \cos\chi'\sin\chi'' - \sin\chi'\cos\chi''\cos n$$

und folglich geht die vorstehende Gleichung in die folgende über,

$$\cos\sigma'\cos\sigma'' + \sin\sigma'\sin\sigma''\cos n + \sin\chi\cos n''\Delta\sigma' + \sin\chi\cos n'\Delta\sigma''$$
$$= \cos\sigma' + \sin\chi\Delta\sigma + \cos\beta'\cos\beta''\{\Delta\omega + \Delta\omega' - \Delta\omega''\}$$

Die Gleichung des vor. Art. für das correspondirende sphärische Dreieck wird durch ein einfaches Verfahren

$$\cos\sigma'\cos\sigma'' + \sin\sigma'\sin\sigma''\cos n - \sin\chi'\sin\chi''\sin n\Delta n = \cos\sigma$$

und wenn man erwägt, dass in dem jetzt eingeführten sphärischen Dreieck die Relationen

$$\frac{\sin\chi}{\sin n} = \frac{\sin\chi'}{\sin n'} = \frac{\sin\chi''}{\sin n''}$$

statt finden, so erhält man aus dem Unterschied der beiden eben entwickelten Gleichungen

$$\Delta n = \frac{1}{\sin n'\sin n''}\left\{\sin n\frac{\Delta\sigma}{\sin\chi} - \sin n'\cos n''\frac{\Delta\sigma'}{\sin\chi'} - \cos n'\sin n''\frac{\Delta\sigma''}{\sin\chi''}\right\}$$
$$+ \frac{\cos\beta'\cos\beta''\sin\omega}{\sin\chi\sin\chi''\sin n'}\left\{\Delta\omega + \Delta\omega' - \Delta\omega''\right\}.$$

Auf dieselbe Art bekommt man ausserdem

$$\Delta n' = \frac{1}{\sin n\sin n''}\left\{\sin n'\frac{\Delta\sigma'}{\sin\chi'} - \cos n\sin n''\frac{\Delta\sigma''}{\sin\chi''} - \sin n\cos n''\frac{\Delta\sigma}{\sin\chi}\right\}$$
$$+ \frac{\cos\beta\cos\beta''\sin\omega'}{\sin\chi\sin\chi'\sin n''}\left\{\Delta\omega + \Delta\omega' - \Delta\omega''\right\}$$

$$\Delta n'' = \frac{1}{\sin n\sin n'}\left\{\sin n''\frac{\Delta\sigma''}{\sin\chi''} - \sin n\cos n'\frac{\Delta\sigma}{\sin\chi} - \cos n\sin n'\frac{\Delta\sigma'}{\sin\chi'}\right\}$$
$$- \frac{\cos\beta\cos\beta'\sin\omega''}{\sin\chi'\sin\chi''\sin n}\left\{\Delta\omega + \Delta\omega' - \Delta\omega''\right\}$$

Ich bemerke hiezu, dass die dritte dieser Gleichungen aus den beiden andern deshalb nicht durch die Vertauschung der Buchstaben erhalten werden kann, weil die Gleichung $\lambda'' = \lambda + \lambda'$ die betreffende Vertauschung nicht zulässt.

87.

Die Reductionen, die zur Entwickelung der eben erhaltenen Gleichungen erforderlich sind, führen sich weit leichter aus, wenn man statt

des bis jetzt betrachteten allgemeinen sphäroidischen Dreiecks das besondere Dreieck betrachtet, in welchem die eine Seite ein Meridianbogen ist. Der Uebergang vom besonderen zum allgemeinen Dreieck ist nach dem Schlusse der Entwickelungen leicht zu bewerkstelligen.

Man verlängere die Dreiecksseite FE der Figur des Art. 84 bis in G, wo sie den Meridian PA schneidet und bezeichne die reducirte Breite dieses Durchschnittspunkts mit w, so wie den Winkel PGE mit m. Hiemit hat man das besondere sphäroidische Dreieck EDG erhalten, in welchem, ausser den schon eingeführten Beziehungen die Seiten

$$EG = \Sigma\,,\ \ DG = \Sigma'$$

gesetzt werden sollen. Die zu Σ und Σ' gehörigen, dem Bogen χ analogen, Bögen sollen φ und φ' genannt werden. Da nun ausserdem der Dreieckswinkel n in α'' übergeht, so verwandelt sich die Gleichung des vor. Art. für Δn in die folgende,

$$(101)\quad \Delta\alpha'' = \frac{1}{\sin n' \sin m}\left\{\sin\alpha''\frac{\Delta\Sigma}{\sin\varphi} - \sin n'\cos m\frac{\Delta\Sigma'}{\sin\varphi'} - \cos n'\sin m\frac{\Delta\sigma''}{\sin\chi''}\right\} + \frac{\cos\beta'\cos w\sin\omega}{\sin\varphi\sin\chi''\sin n'}(\Delta\omega - \Delta\omega'')$$

indem jetzt $\Delta\omega' = 0$ ist, da die Punkte D und G in Einem Meridian liegen.

88.

Nehmen wir die Gleichung (17) vor, die mit Uebergehung der mit e^4 und e^6 multiplicirten Glieder folgender Maassen gestellt werden kann,

$$\sigma = \left(1 - \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{4}k^2\right)\chi + \tfrac{1}{4}k^2\cos(2\varphi' + \chi)\sin\chi$$

und in welcher, der genannten Uebergehungen wegen, $k = e\sin\beta_0$ angenommen werden darf. Eliminirt man hieraus β_0 und φ' durch die Gleichungen (15), so nimmt sie die folgende Form an,

$$\sigma = \left(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{1}{4}e^2\cos^2\beta'\sin^2\alpha'\right)\chi + \tfrac{1}{4}e^2(\sin^2\beta' - \cos^2\beta'\cos^2\alpha')\sin\chi\cos\chi$$
$$- \tfrac{1}{2}e^2\sin\beta'\cos\beta'\cos\alpha'\sin^2\chi$$

wo den Bezeichnungen des ersten Abschnittes gemäss β' und α' dem Anfangspunkt von σ angehören. Aendert man nun diese Bezeichnungen in die hier eingeführten ab, und bedenkt dass Σ' ein Meridianbogen ist, so findet man leicht dass

um $\Delta\Sigma$ zu erhalten

$$\beta' \text{ in } w, \quad \alpha' \text{ in } 180^0 - m, \quad \chi \text{ in } \varphi$$

um $\Delta\Sigma'$ zu erhalten

$$\beta' \text{ in } \beta, \quad \alpha' \text{ in } 0, \quad \chi \text{ in } \varphi'$$

um $\Delta\sigma''$ zu erhalten

$$\beta' \text{ in } \beta, \quad \alpha' \text{ in } \alpha'', \quad \chi \text{ in } \chi''$$

verwandelt werden müssen. Man bekommt daher die folgenden Ausdrücke,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Sigma}{\sin\varphi} = &- \frac{1}{4} e^2 (1 + \cos^2 w \sin^2 m) \frac{\varphi}{\sin\varphi} \\ &+ \frac{1}{4} e^2 (1 - \cos^2 w (2 - \sin^2 m)) \cos\varphi \\ &+ \frac{1}{2} e^2 \sin w \cos w \cos m \sin\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Sigma'}{\sin\varphi'} = &- \frac{1}{4} e^2 \frac{\varphi'}{\sin\varphi'} + \frac{1}{4} e^2 (1 - 2\cos^2\beta) \cos\varphi' \\ &- \frac{1}{2} e^2 \sin\beta \cos\beta \sin\varphi' \quad . \quad . \quad . \quad (102)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\sigma''}{\sin\chi''} = &- \frac{1}{4} e^2 (1 + \cos^2\beta \sin^2\alpha'') \frac{\chi''}{\sin\chi''} \\ &+ \frac{1}{4} e^2 (1 - \cos^2\beta (2 - \sin^2\alpha'')) \cos\chi'' \\ &- \frac{1}{2} e^2 \sin\beta \cos\beta \cos\alpha'' \sin\chi'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)\end{aligned}$$

Da nun hier

$$w = \beta - \varphi'$$

wird, so erhält man

$$\cos^2 w = \cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta\sin\varphi'\cos\varphi' + \sin^2\varphi' - 2\cos^2\beta\sin^2\varphi'$$

$$\sin w\cos w = \sin\beta\cos\beta + \sin\varphi'\cos\varphi' - 2\cos^2\beta\sin\varphi'\cos\varphi' - 2\sin\beta\cos\beta\sin^2\varphi'$$

Eliminirt man hiemit w aus dem vorstehenden Ausdruck für $\Delta\Sigma$, und nimmt auf die Gleichungen

$$\cos\alpha''\sin\chi'' = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos m$$

$$\cos\chi'' = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos m$$

Rücksicht, so bekommt man sehr leicht den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Sigma}{\sin\varphi} = &- \frac{1}{4} e^2 (1 + \sin^2 m \sin^2\varphi') \frac{\varphi}{\sin\varphi} - \frac{1}{4} e^2 \cos^2\beta (1 - 2\sin^2\varphi') \sin^2 m \frac{\varphi}{\sin\varphi} \quad (104) \\ &- \frac{1}{2} e^2 \sin\beta\cos\beta\sin^2 m \sin\varphi'\cos\varphi' \frac{\varphi}{\sin\varphi} \\ &+ \frac{1}{4} e^2 \{\cos\varphi + \sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' - 2\cos\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''\} \\ &- \frac{1}{4} e^2\cos^2\beta\{2\cos\varphi - \sin^2 m\cos\varphi + 2\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' - 4\cos\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''\} \\ &+ \frac{1}{2} e^2\sin\beta\cos\beta\{\cos m\sin\varphi - 2\sin\varphi'\cos\chi'' + \sin^2 m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'\}\end{aligned}$$

der hiemit zur Substitution in (101) vorbereitet ist.

89.

Die Gleichung (20) wird nach der Elimination von β_0, und wenn man nur das mit e^2 multiplicirte Glied beibehält,

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} e^2 \cos\beta' \sin\alpha' \,.\, \chi$$

wo die Bezeichnungen wieder die des ersten Abschnittes sind. Durch Einführung der hier festgesetzten Bezeichnungen ergiebt sich aus diesem Ausdruck

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} e^2 \cos w \sin m \,.\, \varphi$$

$$\Delta\omega'' = \frac{1}{2} e^2 \cos\beta \sin\alpha'' \,.\, \chi''$$

also nachdem w durch die Gleichung

$$\cos w = \cos\beta \cos\varphi' + \sin\beta \sin\varphi'$$

eliminirt worden ist,

$$\Delta\omega - \Delta\omega'' = -\frac{1}{2} e^2 \cos\beta \sin\alpha'' \sin\chi'' \left\{ \frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi} \cos\varphi' \right\}$$
$$+ \frac{1}{2} e^2 \sin\beta \sin\alpha'' \sin\varphi' \sin\chi'' \frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

wenn man auf die jetzt statt findenden Relationen

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha''} = \frac{\sin\varphi'}{\sin n'} = \frac{\sin\chi''}{\sin m}$$

Rücksicht nimmt. Da ferner

$$\cos\beta' \sin\omega = \sin m \sin\varphi$$

ist, so bekommt man

$$\frac{\cos\beta' \cos w \sin\omega}{\sin\varphi \sin\chi'' \sin n'} = \frac{\cos w}{\sin\varphi'}$$

und wenn wieder w eliminirt wird,

$$\frac{\cos\beta' \cos w \sin\omega}{\sin\varphi \sin\chi'' \sin n'} = \sin\beta + \cos\beta \frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi'}$$

Die Multiplication giebt hierauf

$$(105)\quad \frac{\cos\beta' \cos w \sin\omega}{\sin\varphi \sin\chi'' \sin n'} (\Delta\omega - \Delta\omega'') = \frac{1}{2} e^2 \sin\alpha'' \sin\varphi' \sin\chi'' \frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$- \frac{1}{2} e^2 \cos^2\beta \left\{ \frac{\sin\alpha'' \sin m}{\sin n'} \cos\varphi' \left\{ \frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi} \cos\varphi' \right\} - \sin\alpha'' \sin\varphi' \sin\chi'' \frac{\varphi}{\sin\varphi} \right\}$$
$$- \frac{1}{2} e^2 \sin\beta \cos\beta \left\{ \sin\alpha'' \sin\chi'' \left\{ \frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi} \cos\varphi' \right\} - \sin\alpha'' \cos\varphi' \sin\chi'' \frac{\varphi}{\sin\varphi} \right\}$$

womit die Ausdrücke aller aus (101) fortzuschaffenden Functionen erlangt sind.

90.

Die Substitution der Ausdrücke (102), (103), (104), (105) in (101) giebt nun $\Delta\alpha''$ in folgender Form,

$$\Delta\alpha'' = \frac{\frac{1}{4}e^2}{\sin n' \sin m}\{(1)+(4)\} + \frac{\frac{1}{4}e^2\cos^2\beta}{\sin n' \sin m}\{(2)+(5)\} \quad . \quad . \quad (106)$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta}{\sin n' \sin m}\{(3)+(6)\}$$

und wenn man die Ausdrücke der Coefficienten so theilt, dass (1), (2), (3) die Bögen φ, φ', χ'' enthalten, die (4), (5), (6) hingegen davon unabhängig werden, so findet man

$$(1) = -\sin\alpha''(1-\sin^2 m\sin^2\varphi')\frac{\varphi}{\sin\varphi} + \sin n'\cos m\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} + \cos n'\sin m\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$

$$(2) = -2\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi'\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$
$$-\sin\alpha''\sin^2 m\frac{\varphi}{\sin\varphi} + \sin^2\alpha''\cos n'\sin m\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$

$$(3) = -\sin\alpha''\sin n'\sin m\sin\chi''\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$

$$(4) = \sin\alpha''\cos\varphi - \sin n'\cos m\cos\varphi' - \cos n'\sin m\cos\chi''$$
$$+\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' - 2\sin\alpha''\cos\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''$$

$$(5) = -2\sin\alpha''\cos\varphi + 2\sin n'\cos m\cos\varphi' + 2\cos n'\sin m\cos\chi''$$
$$+\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi - 2\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi'$$
$$-\sin^2\alpha''\cos n'\sin m\cos\chi'' + 4\sin\alpha''\cos\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''$$

$$(6) = \sin\alpha''\cos m\sin\varphi + \sin n'\cos m\sin\varphi' + \cos\alpha''\cos n'\sin m\sin\chi''$$
$$+\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi' - 2\sin\alpha''\sin\varphi'\cos\chi''$$

die noch auf ihre einfachste Form hinzuführen sind.

91.

Zur Reduction des Coefficienten (1) bemerke ich, dass die sphärische Trigonometrie die Gleichung

$$\sin\alpha''\cos\varphi' = \cos n'\sin m + \sin n'\cos m\cos\varphi$$

giebt, und dass identisch

$$1-\sin^2 m\sin^2\varphi' = \cos^2\varphi' + \cos^2 m\sin^2\varphi'$$

ist. Hiemit erhält man leicht

$$\sin\alpha''(1-\sin^2 m\sin^2\varphi')\cos\varphi' = \cos n'\sin m\cos^2\varphi' + \cos n'\sin m\cos^2 m\sin^2\varphi' + \sin n'\cos m\cos\varphi(1-\sin^2 m\sin^2\varphi')$$

Aber die Trigonometrie giebt auch

$$\cos\varphi = \cos\varphi'\cos\chi'' + \sin\varphi'\sin\chi''\cos\alpha''$$
$$\cos\alpha'' = -\cos n'\cos m + \sin n'\sin m\cos\varphi$$

woraus

$$\cos\varphi(1-\sin^2 m\sin^2\varphi') = \cos\varphi'\cos\chi'' - \cos n'\cos m\sin\varphi'\sin\chi''$$

folgt. Setzt man diesen Ausdruck in das letzte Glied der vorstehenden Gleichung, so wird alsbald

$$(107)\quad \sin\alpha''(1-\sin^2 m\sin^2\varphi') = \cos n'\sin m\cos\varphi' + \sin n'\cos m\cos\chi''$$

womit

$$(1) = \left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\cos n'\sin m + \left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}\sin n'\cos m$$

erhalten wird.

Den Ausdruck des Coefficienten (2) bringt man zuerst leicht auf die folgende Form

$$(2) = -\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi'\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\} - \sin\alpha''\sin n'\sin m\sin\varphi'\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi} + \sin\alpha''\sin m\{\sin\alpha''\cos n' - \sin m\cos\varphi'\}\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$

und wendet man hierauf die trigonometrische Gleichung

$$\sin m\cos\varphi' = \sin\alpha''\cos n' + \cos\alpha''\sin n'\cos\chi''$$

an, so ergiebt sich

$$(2) = -\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi'\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\} - \sin\alpha''\cos\alpha''\sin n'\sin m\frac{\chi''}{\operatorname{tg}\chi''} - \sin\alpha''\sin n'\sin m\sin\varphi'\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Der Coefficient (3) hat oben schon seine einfachste Form. Für den Coefficienten (4) nehme ich die Gleichung (107) vor, die ich wie folgt stelle,

$$\sin\alpha'' = \cos n'\sin m\cos\varphi' + \sin n'\cos m\cos\chi'' + \sin\alpha''\sin^2 m\sin^2\varphi'$$

und eliminire damit das Glied $\sin\alpha''\cos\varphi$ des Ausdrucks für (4), wodurch

$$(4) = -\sin n'\cos m(\cos\varphi' - \cos\varphi\cos\chi'') - \cos n'\sin m(\cos\chi'' - \cos\varphi\cos\varphi') + 2\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' - 2\sin\alpha''\cos\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''$$

entsteht. Aber die Trigonometrie giebt auch

$$\cos\varphi' = \cos\varphi\cos\chi'' + \sin\varphi\sin\chi''\cos n'$$
$$\cos\chi'' = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos m$$

Durch Hülfe dieser, so wie der Relationen zwischen den Sinussen der Seiten und denen der Winkel geht der vorstehende Ausdruck in den folgenden über,

$$(4) = -2\sin\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''\{\cos\alpha''+\cos n'\cos m-\sin n'\sin m\cos\varphi\}$$
$$= 0$$

da auch

$$\cos\alpha'' = -\cos n'\cos m + \sin n'\sin m\cos\varphi$$

ist. Diese letzte Reduction hat uns auf die folgende Gleichung geführt,

$$\sin\alpha''\cos\varphi - \sin n'\cos m\cos\varphi' - \cos n'\sin m\cos\chi''$$
$$= -\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' + 2\sin\alpha''\cos\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''$$

und benutzt man diese um die drei ersten Glieder des Ausdrucks von (5) fortzuschaffen, so wird sogleich

$$(5) = \sin\alpha''\sin m\{\sin m\cos\varphi - \sin\alpha''\cos n'\cos\chi''\}$$
$$= \sin\alpha''\cos\alpha''\sin n'\sin m$$

indem die Trigonometrie auch

$$\sin m\cos\varphi = \cos\alpha''\sin n' + \sin\alpha''\cos n'\cos\chi''$$

giebt. Vermittelst der Anwendung der Gleichungen

$$\cos m\sin\varphi = \sin\varphi'\cos\chi'' - \cos\varphi'\sin\chi''\cos\alpha''$$
$$\cos m\sin\varphi' = \sin\varphi\cos\chi'' - \cos\varphi\sin\chi''\cos n'$$
$$\cos\alpha''\sin\chi'' = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos m$$

auf die drei ersten Glieder des Ausdrucks von (6), erhält man ohne Mühe

$$(6) = -\sin\alpha''\cos\varphi'\sin\chi''\{\cos\alpha''+\cos n'\cos m-\sin n'\sin m\cos\varphi\}$$
$$= 0$$

womit die Reductionen ausgeführt sind.

92.

Substituirt man jetzt die im vor. Art. erhaltenen Ausdrücke der Coefficienten (1) bis (6) in (106), so ergiebt sich, wenn man zur leichteren Uebersicht die Bezeichnungen

$$A = \left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\operatorname{cotg} n' + \left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}\operatorname{cotg} m$$

$$B = -\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\frac{\sin\alpha''\sin m}{\sin n'}\cos\varphi'$$

$$+ \left\{1 - \frac{\chi''}{\operatorname{tg}\chi''}\right\}\sin\alpha''\cos\alpha'' - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''$$

$$C = -\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\sin\alpha''\sin\chi''$$

einführt,

$$\Delta\alpha'' = \frac{1}{4}e^2 A + \frac{1}{4}e^2\cos^2\beta . B + \frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta . C$$

Es ist hiebei zu bemerken, dass wenn man die Seiten des sphäroidischen Dreiecks als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet, die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks für $\Delta\alpha''$ von der vierten, das dritte Glied aber von der fünften Ordnung sind.

93.

Es wird von Nutzen sein auch die Ausdrücke der beiden andern Winkel unsers Dreiecks in Function derselben reducirten Breite β zu entwickeln. Zu dem Ende giebt der Ausdruck des Art. 86 für $\Delta n''$, wenn man ihn auf das besondere, jetzt in Betracht stehende sphäroidische Dreieck anwendet,

$$\Delta m = \frac{1}{\sin\alpha''\sin n'}\left\{\sin m\frac{\Delta\sigma''}{\sin\chi''} - \sin\alpha''\cos n'\frac{\Delta\Sigma}{\sin\varphi} - \cos\alpha''\sin n'\frac{\Delta\Sigma'}{\sin\varphi'}\right\}$$
$$- \frac{\cos\beta\cos\beta'\sin\omega''}{\sin\varphi'\sin\chi''\sin\alpha''}(\Delta\omega - \Delta\omega'')$$

Da $\cos\beta'\sin\omega'' = \sin\alpha''\sin\chi''$ ist, so wird sogleich

$$\frac{\cos\beta\cos\beta'\sin\omega''}{\sin\varphi'\sin\chi''\sin\alpha''} = \frac{\cos\beta}{\sin\varphi'} = \frac{\cos\beta\sin m}{\sin\chi''\sin n'}$$

Die Multiplication mit dem Ausdruck für $\Delta\omega - \Delta\omega''$ des Art. 89 giebt daher

$$\frac{\cos\beta\cos\beta'\sin\omega''}{\sin\varphi'\sin\chi''\sin\alpha''}(\Delta\omega - \Delta\omega'') = -\frac{1}{2}e^2\cos^2\beta\frac{\sin\alpha''\sin m}{\sin n'}\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta\sin\alpha''\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Setzt man nun mit der nemlichen Bedingung wie oben

$$(108)\quad \Delta m = \frac{\frac{1}{4}e^2}{\sin\alpha''\sin n'}\{(1)+(4)\} + \frac{\frac{1}{4}e^2\cos^2\beta}{\sin\alpha''\sin n'}\{(2)+(5)\} + \frac{\frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha''\sin n'}\{(3)+(6)\}$$

und substituirt ausser dem eben entwickelten Ausdruck die (102), (103), (104), so ergeben sich die folgenden Ausdrücke der Coefficienten,

$$(1) = \sin\alpha''\cos n'\frac{\varphi}{\sin\varphi} + \cos\alpha''\sin n'\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \sin m\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$
$$+ \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\sin^2\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

$$(2) = \sin\alpha''\cos n'(1-2\sin^2\varphi')\sin^2 m\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \sin^2\alpha''\sin m\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$
$$+ 2\sin^2\alpha''\sin m\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$

$$(3) = \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \sin^2\alpha''\sin n'\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

$$(4) = -\sin\alpha''\cos n'\cos\varphi - \cos\alpha''\sin n'\cos\varphi' + \sin m\cos\chi''$$
$$- \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' + 2\sin\alpha''\cos\alpha''\cos n'\sin\varphi'\sin\chi''$$

$$(5) = 2\sin\alpha''\cos n'\cos\varphi + 2\cos\alpha''\sin n'\cos\varphi' - 2\sin m\cos\chi''$$
$$- \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi + 2\sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi'$$
$$- 4\sin\alpha''\cos\alpha''\cos n'\sin\varphi'\sin\chi'' + \sin^2\alpha''\sin m\cos\chi''$$

$$(6) = -\sin\alpha''\cos n'\cos m\sin\varphi + \cos\alpha''\sin n'\sin\varphi' - \cos\alpha''\sin m\sin\chi''$$
$$+ 2\sin\alpha''\cos n'\sin\varphi'\cos\chi'' - \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'$$

die auf ihre einfachste Form hinzuführen sind.

94.

Eliminirt man vermittelst der Gleichung

$$\sin m\cos\varphi' = \sin\alpha''\cos n' + \cos\alpha''\sin n'\cos\chi''$$

den Factor $\sin\alpha''\cos n'$ des ersten Gliedes im Ausdruck für (1), so ergiebt sich sogleich

$$(1) = -\sin m\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\} + \cos\alpha''\sin n'\left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}$$
$$+ \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\sin^2\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Addirt und subtrahirt man die Function $\sin^2\alpha''\sin m\cos\varphi'$ auf der rechten Seite des Ausdrucks für (2), und berücksichtigt die Gleichung

$$\sin\alpha''\cos\varphi' = \cos n'\sin m + \sin n'\cos m\cos\varphi$$

so wird

$$(2) = \sin^2\alpha''\sin m\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$
$$- \sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\cos\varphi\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$- 2\sin\alpha''\sin n'\cos n'\sin m\sin\varphi'\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Durch dieselbe, eben angewandte, Hülfsgleichung bringt man den Ausdruck für (3) ohne Mühe auf die folgende Form

$$(3) = -\sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$-\sin^2\alpha''\sin n'\sin^2\varphi'\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Die Gleichung (107) giebt durch die Versetzung der Buchstaben

$$\sin m = \cos\alpha''\sin n'\cos\varphi + \sin\alpha''\cos n'\cos\varphi' + \sin^2 n'\sin m\sin^2\varphi$$

Eliminirt man hiemit $\sin m$ im dritten Gliede des Ausdrucks des Coefficienten (4), und verfährt übrigens eben so wie oben bei der Reduction des gleichbenannten Coefficienten, so wird

$$(4) = \sin\alpha''\sin m\sin^2\varphi'\{\sin\alpha''\cos\chi'' - \cos n'\sin m\cos\varphi\}$$
$$= \sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\sin^2\varphi'$$

da die Trigonometrie

$$\sin\alpha''\cos\chi'' = \sin n'\cos m + \cos n'\sin m\cos\varphi$$

giebt. Hiemit haben wir die Gleichung

$$\sin\alpha''\cos n'\cos\varphi + \cos\alpha''\sin n'\cos\varphi' - \sin m\cos\chi''$$
$$= -\sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' + 2\sin\alpha''\cos\alpha''\cos n'\sin\varphi'\sin\chi''$$
$$-\sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\sin^2\varphi'$$

erhalten, und eliminirt man damit die drei ersten Glieder des Ausdrucks von (5), dann ergiebt sich sogleich

$$(5) = \sin\alpha''\sin m\{\sin\alpha''\cos\chi'' - \cos n'\sin m\cos\varphi\}$$
$$-2\sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\sin^2\varphi'$$
$$= \sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m - 2\sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\sin^2\varphi'$$

Die Anwendung der Gleichungen

$$\cos n'\sin\varphi = \cos\varphi'\sin\chi'' - \sin\varphi'\cos\chi''\cos\alpha''$$
$$\cos\alpha''\sin\varphi' = \cos\varphi\sin\chi'' - \sin\varphi\cos\chi''\cos n'$$
$$\cos\alpha''\sin\chi'' = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos m$$

auf die drei ersten Glieder des Ausdrucks für (6) giebt zuerst

$$(6) = \sin\alpha''\sin\varphi'\cos\chi''(\cos n' + \cos\alpha''\cos m)$$
$$-\sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'$$

und da

$$\cos n' = -\cos\alpha''\cos m + \sin\alpha''\sin m\cos\varphi'$$

ist, so folgt hieraus

$$(6) = \sin\alpha''\sin m\sin\varphi'\cos\varphi'\{\sin\alpha''\cos\chi'' - \cos n'\sin m\cos\varphi\}$$
$$= \sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\sin\varphi'\cos\varphi'$$

womit die Reductionen ausgeführt sind.

95.

Substituirt man nun die eben erhaltenen Ausdrücke der Coefficienten (1) bis (6) in (108), und setzt zur leichtern Uebersicht

$$A'' = -\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\frac{\sin m}{\sin\alpha''\sin n'} + \left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}\operatorname{cotg}\alpha''$$
$$+ \frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin n'\cos n'\sin^2\chi'' + \sin m\cos m\sin^2\varphi'$$
$$B'' = \left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\frac{\sin\alpha''\sin m}{\sin n'} + \left\{1 - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi\right\}\sin m\cos m$$
$$- 2\frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin n'\cos n'\sin^2\chi'' - 2\sin m\cos m\sin^2\varphi'$$
$$C'' = \left\{1 - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi\right\}\sin m\cos m\sin\varphi'\cos\varphi' - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin\alpha''\sin^2\varphi'\sin\chi''$$

so wird schliesslich

$$\Delta m = \frac{1}{4}e^2 A'' + \frac{1}{4}e^4\cos^2\beta . B'' + \frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta . C''$$

Auch hier zeigt sich auf den ersten Blick, dass die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks von der vierten Ordnung sind, während das dritte von der fünften ist, wenn die Dreiecksseiten als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden.

96.

Nehmen wir jetzt die Gleichung für $\Delta n'$ des Art. 86 vor, und wenden sie auf das in Betracht stehende besondere sphäroidische Dreieck an, so geht sie wegen $\omega' = 0$ in die folgende über,

$$\Delta n' = \frac{1}{\sin\alpha''\sin m}\left\{\sin n'\frac{\Delta\Sigma'}{\sin\varphi'} - \cos\alpha''\sin m\frac{\Delta\sigma''}{\sin\chi''} - \sin\alpha''\cos m\frac{\Delta\Sigma}{\sin\varphi}\right\}$$

Setzt man wieder hiefür

$$\Delta n' = \frac{\frac{1}{4}e^2}{\sin\alpha''\sin m}\{(1)+(4)\} + \frac{\frac{1}{4}e^4\cos^2\beta}{\sin\alpha''\sin m}\{(2)+(5)\} + \frac{\frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha''\sin m}\{(3)+(6)\} \quad (109)$$

und substituirt wieder die Ausdrücke (102), (103), (104), so bekommt man zuerst

$$(1) = \sin\alpha''\cos m\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \sin n'\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} + \cos\alpha''\sin m\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$
$$+ \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\sin^2\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$(2) = \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\frac{\varphi}{\sin\varphi} + \sin^2\alpha''\cos\alpha''\sin m\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$
$$- 2\sin\alpha''\sin^2 m\cos m\sin^2\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$(3) = \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$(4) = -\sin\alpha''\cos m\cos\varphi + \sin n'\cos\varphi' - \cos\alpha''\sin m\cos\chi''$$
$$- \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi\sin^2\varphi' + 2\sin\alpha''\cos\alpha''\cos m\sin\varphi'\sin\chi''$$
$$(5) = 2\sin\alpha''\cos m\cos\varphi - 2\sin n'\cos\varphi' + 2\cos\alpha''\sin m\cos\chi''$$
$$- \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi - \sin^2\alpha''\cos\alpha''\sin m\cos\chi''$$
$$+ 2\sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi\sin^2\varphi' - 4\sin\alpha''\cos\alpha''\cos m\sin\varphi'\sin\chi''$$
$$(6) = -\sin\alpha''\cos^2 m\sin\varphi - \sin n'\sin\varphi' + \cos^2\alpha''\sin m\sin\chi''$$
$$- \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi' + 2\sin\alpha''\cos m\sin\varphi'\cos\chi''$$

deren Reduction fast ebenso ausgeführt werden kann, wie die der vorhergehenden Coefficienten.

97.

Eliminirt man durch

$$\sin n'\cos\chi'' = \sin\alpha''\cos m + \cos\alpha''\sin m\cos\varphi'$$

den Factor $\sin\alpha''\cos m$ des ersten Gliedes des Ausdrucks von (1), so wird sogleich

$$(1) = \cos\alpha''\sin m\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\} - \sin n'\left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi'}\cos\chi''\right\}$$
$$+ \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\sin^2\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Die Coefficienten (2) und (3) sind keiner weiteren Reduction fähig. Für die Reduction des Ausdrucks für (4) giebt die Gleichung (107) durch die Versetzung der Buchstaben

$$(110) \quad \sin n' = \sin\alpha''\cos m\cos\chi'' + \cos\alpha''\sin m\cos\varphi + \sin^2\alpha''\sin n'\sin^2\chi''$$

und eliminirt man damit $\sin n'$ aus dem zweiten Gliede des obigen Ausdrucks für (4), so bekommt man auf ähnliche Art wie oben

$$(4) = \sin\alpha''\sin n'\sin^2\chi''\{\sin\alpha''\cos\varphi' - \sin n'\cos m\cos\varphi\}$$
$$= \sin\alpha''\sin n'\cos n'\sin m\sin^2\chi''$$

indem die Trigonometrie

$$\sin\alpha''\cos\varphi' = \cos n'\sin m + \sin n'\cos m\cos\varphi$$

giebt. Vermittelst der Gleichung

$$\begin{aligned} &\sin\alpha''\cos m\cos\varphi - \sin n'\cos\varphi' + \cos\alpha''\sin m\cos\chi'' \\ = &- \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi\sin^2\varphi' + 2\sin\alpha''\cos\alpha''\cos m\sin\varphi'\sin\chi'' \\ &- \sin\alpha''\sin n'\cos n'\sin m\sin^2\chi'' \end{aligned}$$

die sich durch die eben ausgeführte Reduction ergiebt, eliminire man die drei ersten Glieder des Ausdrucks von (5), wodurch auf einfache Weise

$$\begin{aligned} (5) = &- \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi - \sin^2\alpha''\cos\alpha''\sin m\cos\chi'' \\ &- 2\sin\alpha''\sin n'\cos n'\sin m\sin^2\chi'' \end{aligned}$$

erhalten wird. Zur Reduction des Ausdrucks für (6) wende ich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos m\sin\varphi &= \sin\varphi'\cos\chi'' - \cos\varphi'\sin\chi''\cos\alpha'' \\ \cos\alpha''\sin\chi'' &= \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos m \end{aligned}$$

nebst der oben erhaltenen (110) an, und bekomme damit

$$\begin{aligned} (6) = &- \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi' \\ &- \sin^2\alpha''\sin m\sin^2\varphi'\sin\chi'' \end{aligned}$$

womit auch diese Reductionen ausgeführt sind.

98.

Setzt man nun aus demselben Grunde wie oben

$$\begin{aligned} A' = &\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\operatorname{cotg}\alpha'' - \left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}\frac{\sin n'}{\sin\alpha''\sin m} \\ &+ \frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin m\cos m\sin^2\varphi' + \sin n'\cos n'\sin^2\chi'' \\ B' = &\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \cos\chi''\right\}\sin\alpha''\cos\alpha'' + \left\{\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \cos\varphi\right\}\sin m\cos m \\ &- 2\frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin m\cos m\sin^2\varphi' - 2\sin n'\cos n'\sin^2\chi'' \\ C' = &\left\{\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \cos\varphi\right\}\sin m\cos m\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin\alpha''\sin^2\varphi'\sin\chi'' \end{aligned}$$

dann ergiebt sich schliesslich

$$\Delta n' = \tfrac{1}{4}e^2A' + \tfrac{1}{4}e^2\cos^2\beta . B' + \tfrac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta . C'$$

Auch hier sieht man sogleich, dass die Ordnungen der Glieder dieselben sind wie bei den vorher entwickelten Ausdrücken.

99.

Es sollen jetzt die Dreiecksseiten als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet, und unter dieser Voraussetzung die im Vorhergehenden erlangten Ausdrücke der Winkeländerungen bis auf Grössen sechster Ordnung entwickelt werden. Die Coefficienten A, B, C, A', etc. von e^2 brauchen zu dem Ende nur bis auf Grössen vierter Ordnung entwickelt zu werden. Aber statt der Entwickelung der einzelnen Incremente $\Delta\alpha''$, $\Delta n'$, Δm, werde ich die der Function $3\Delta\alpha''-\Delta n'-\Delta m$ vornehmen, die die merkwürdige Eigenschaft besitzt, dass die Glieder fünfter Ordnung in derselben Null sind. Setzt man

$$3\Delta\alpha''-\Delta n'-\Delta m = \tfrac{1}{4}e^2K+\tfrac{1}{4}e^2\cos^2\beta.L+\tfrac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta.M$$

so geben die unveränderten Ausdrücke der Artt. 92, 95, 98,

$$\begin{aligned}
K = {} & \left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''}-\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\left\{3\operatorname{cotg}n'+\frac{\sin m}{\sin\alpha''\sin n'}-\operatorname{cotg}\alpha''\right\}\\
& +\left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'}-\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}\left\{3\operatorname{cotg}m+\frac{\sin n'}{\sin\alpha''\sin m}-\operatorname{cotg}\alpha''\right\}\\
& -\left(1+\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)\left\{\sin m\cos m\sin^2\varphi'+\sin n'\cos n'\sin^2\chi''\right\}\\
L = {} & -\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''}-\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}(3\cos\varphi'+1)\frac{\sin\alpha''\sin m}{\sin n'}\\
& +\left\{3\left(1-\frac{\chi''}{\operatorname{tg}\chi''}\right)-\left(\frac{\chi''}{\sin\chi''}-\cos\chi''\right)\right\}\sin\alpha''\cos\alpha''\\
& -3\frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''-\left(1+\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)(1-\cos\varphi)\sin m\cos m\\
& +2\left(1+\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)\left\{\sin m\cos m\sin^2\varphi'+\sin n'\cos n'\sin^2\chi''\right\}\\
M = {} & -3\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''}-\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\sin\alpha''\sin\chi''\\
& -\left(1+\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)(1-\cos\varphi)\sin m\cos m\sin\varphi'\cos\varphi'\\
& +\left(1+\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)\sin\alpha''\sin^2\varphi'\sin\chi''
\end{aligned}$$

100.

Bei der Entwickelung dieser Coefficienten, die alle mindestens von der zweiten Ordnung sind, bis auf Grössen vierter Ordnung ist vor Allem zu bemerken, dass die Seiten und Winkel so angesehen werden dürfen, als gehörten sie einem ebenen Dreieck an. Es folgt dieses daraus, dass ein ebenes, und ein sphärisches Dreieck von gleichen Seiten

in den Winkeln nur um Grössen zweiter Ordnung von einander verschieden sind, wenn die Seiten als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden. Es darf daher in den folgenden Entwickelungen

$$\alpha'' + n' + m = 180^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (111)$$

angenommen werden, und demzufolge wird

$$3 \operatorname{cotg} n' + \frac{\sin m}{\sin \alpha'' \sin n'} - \operatorname{cotg} \alpha'' = 4 \operatorname{cotg} n'$$

$$3 \operatorname{cotg} m + \frac{\sin n'}{\sin \alpha'' \sin m} - \operatorname{cotg} \alpha'' = 4 \operatorname{cotg} m$$

und man findet ferner

$$\frac{\chi''}{\sin \chi''} - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cos \varphi' = -\frac{1}{6} \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi'^2 + \frac{1}{6} \chi''^2$$

$$\frac{\varphi'}{\sin \varphi'} - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cos \chi'' = -\frac{1}{6} \varphi^2 + \frac{1}{6} \varphi'^2 + \frac{1}{2} \chi''^2$$

Bezeichnet man nun die Fläche des Dreiecks DEG der Figur des Art. 84 mit F, so ist bis auf Grössen vierter Ordnung

$$2F = \varphi^2 \frac{\sin n' \sin m}{\sin \alpha''} = \varphi'^2 \frac{\sin \alpha'' \sin m}{\sin n'} = \chi''^2 \frac{\sin \alpha'' \sin n'}{\sin m}$$

wodurch sogleich

$$\frac{\chi''}{\sin \chi''} - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cos \varphi' = -\frac{1}{3} F \frac{\sin^2 \alpha'' - 3 \sin^2 n' - \sin^2 m}{\sin \alpha'' \sin n' \sin m}$$

wird. Aber mit Zuziehung der Gleichung (111) findet man leicht, dass

$$\sin^2 \alpha'' - \sin^2 n' - \sin^2 m = -2 \cos \alpha'' \sin n' \sin m$$

ist, folglich wird

$$\frac{\chi''}{\sin \chi''} - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cos \varphi' = \frac{2}{3} F \left\{ \frac{\sin n'}{\sin \alpha'' \sin m} + \operatorname{cotg} \alpha'' \right\}$$

und durch die Vertauschung der Buchstaben ergiebt sich hieraus

$$\frac{\varphi'}{\sin \varphi'} - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cos \chi'' = \frac{2}{3} F \left\{ \frac{\sin m}{\sin \alpha'' \sin n'} + \operatorname{cotg} \alpha'' \right\}$$

Multiplicirt man nun diese beiden Ausdrücke bez. mit $4 \operatorname{cotg} n'$ und $4 \operatorname{cotg} m$, und addirt, so bekommt man zuerst die Summe der beiden ersten Glieder des Ausdrucks für K

$$= \frac{8}{3} F \frac{\sin \alpha'' \cos \alpha'' + \sin n' \cos n' + \sin m \cos m}{\sin \alpha'' \sin n' \sin m}$$

Aber in Folge der (111) ist

$$\sin \alpha'' \cos \alpha'' + \sin n' \cos n' + \sin m \cos m = 2 \sin \alpha'' \sin n' \sin m$$

und die genannte Summe wird daher $= \frac{16}{3} F$.

Die obigen Ausdrücke der Dreiecksfläche geben ferner

$$\sin m \cos m \sin^2 \varphi' = 2F \frac{\sin n' \cos m}{\sin \alpha''}$$

$$\sin n' \cos n' \sin^2 \chi'' = 2F \frac{\cos n' \sin m}{\sin \alpha''}$$

Hieraus wird sogleich die Summe der beiden letzten Glieder des Ausdrucks für $K = -4F$, und folglich ergiebt sich

$$K = \frac{4}{3} F$$

bis auf Grössen vierter Ordnung genau.

101.

Das erste Glied des Ausdrucks für L wird dem Vorhergehenden zufolge sofort

$$= -\frac{8}{3} F \left\{ 1 + \frac{\cos \alpha'' \sin m}{\sin n'} \right\}$$

und ausserdem findet man leicht

$$\left\{ 3\left(1 - \frac{\chi''}{\operatorname{tg} \chi''}\right) - \left(\frac{\chi''}{\sin \chi''} - \cos \chi''\right) \right\} \sin \alpha'' \cos \alpha'' = \frac{4}{3} \chi''^2 \sin \alpha'' \cos \alpha''$$
$$= \frac{2}{3} F \frac{\cos \alpha'' \sin m}{\sin n'}$$

Die Summe der zwei ersten Glieder von L wird also

$$= -\frac{8}{3} F - 2F \frac{\cos \alpha'' \sin m}{\sin n'}$$

Da mit der hier erforderlichen Genauigkeit auch $2F = \sin \alpha'' \sin \varphi' \sin \chi''$ ist, so wird

$$-3 \frac{\varphi}{\sin \varphi} \sin \alpha'' \sin \varphi' \sin \chi'' = -6F$$

ferner wird

$$-\left(1 + \frac{\varphi}{\sin \varphi}\right)(1 - \cos \varphi) \sin m \cos m = -\varphi^2 \sin m \cos m$$
$$= -2F \frac{\sin \alpha'' \cos m}{\sin n'}$$

und das letzte Glied von L wird zufolge des vor. Art. $= 8F$. Die Addition dieser Glieder giebt nun

$$L = -\frac{8}{3} F$$

ebenfalls bis auf Grössen vierter Ordnung genau.

102.

Für M bekommt man in Folge des Vorhergehenden sogleich

$$M = -2F\left\{\frac{\sin n' \sin \chi''}{\sin m} + \cos\alpha'' \sin\chi''\right\}$$
$$-2F\frac{\sin\alpha''\cos m}{\sin n'}\sin\varphi' + 4F\sin\varphi'$$
$$= -2F\left\{1 + \frac{\cos\alpha''\sin m}{\sin n'}\right\}\sin\varphi' - 2F\frac{\sin\alpha''\cos m}{\sin n'}\sin\varphi' + 4F\sin\varphi'$$
$$= 0$$

Glieder der dritten Ordnung in den Coefficienten sind also nicht vorhanden, und folglich sind auch in der entwickelten Function die Glieder fünfter Ordnung gleich Null, wie im Art. 99 angeführt wurde.

103.

Stellen wir nun die erhaltenen Entwickelungen zusammen, so haben wir erhalten

$$3\Delta\alpha'' - \Delta n' - \Delta m = -\frac{e^2 F}{3}\cos 2\beta$$

und um von hier zum allgemeinen Dreieck über zu gehen, betrachten wir auch das besondere Dreieck DFG der oft angezogenen Figur, in welchem der Winkel $FDG = \alpha'$, und der Winkel $DFG = 180^\circ - n''$ ist. Der eben erhaltene Ausdruck giebt sogleich für dieses Dreieck

$$3\Delta\alpha' + \Delta n'' - \Delta m = -\frac{e^2 F'}{3}\cos 2\beta$$

wenn die Fläche desselben mit F' bezeichnet wird. Nennt man aber Δ die Fläche des allgemeinen sphäroidischen Dreiecks DEF, dann ist

$$\Delta = F - F'$$

und ausserdem ist $\Delta n = \Delta\alpha'' - \Delta\alpha'$, der Unterschied der obigen Gleichungen giebt also

$$3\Delta n - \Delta n' - \Delta n'' = -\frac{e^2\Delta}{3}\cos 2\beta$$

bis auf Grössen sechster Ordnung genau. Da diese Gleichung durch die Vertauschung der Buchstaben

$$3\Delta n' - \Delta n'' - \Delta n = -\frac{e^2\Delta}{3}\cos 2\beta'$$
$$3\Delta n'' - \Delta n - \Delta n' = -\frac{e^2\Delta}{3}\cos 2\beta''$$

giebt, so erhält man durch eine leichte Combination dieser drei Gleichungen schliesslich

$$(112)\quad \begin{cases} \Delta n = -\frac{e^2\Delta}{12}\{2\cos 2\beta + \cos 2\beta' + \cos 2\beta''\} \\ \Delta n' = -\frac{e^2\Delta}{12}\{\cos 2\beta + 2\cos 2\beta' + \cos 2\beta''\} \\ \Delta n'' = -\frac{e^2\Delta}{12}\{\cos 2\beta + \cos 2\beta' + 2\cos 2\beta''\} \end{cases}$$

die auch bis auf Grössen sechster Ordnung genau sind. Man bekommt überdies hieraus

$$\Delta n + \Delta n' + \Delta n'' = -\frac{e^2\Delta}{3}\{\cos 2\beta + \cos 2\beta' + \cos 2\beta''\}$$

mit derselben Genauigkeit.

104.

Bei der Beurtheilung der Ausdehnung, in welcher die eben abgeleiteten Ausdrücke Resultate von ausreichender Genauigkeit geben, kommt vor Allem die Grösse der Dreiecksfläche in Betracht, aber diese ist nicht das alleinige Criterion dafür. Man kann sich Dreiecke von sehr kleiner Fläche denken, die sehr grosse Seiten haben, und es liegt an der Hand, dass man von den vorstehenden Ausdrücken kein genaues Resultat erwarten darf, wenn die Seiten des Dreiecks so gross sind, dass sie nicht als kleine Grössen erster Ordnung angesehen werden können. Zur Beurtheilung der Grenzen der Anwendbarkeit dieser Ausdrücke könnte die Entwickelung der hier übergangenen Glieder sechster und höherer Ordnungen dienen, allein diese scheinen sich durch das vorhergehende Verfahren nur schwer in ihrer einfachsten Form angeben zu lassen, sie werden hingegen mit weit grösserer Leichtigkeit, und in einer nicht minder eleganten Form wie die vorhergehenden, durch das Verfahren erhalten welches jetzt entwickelt werden soll, und man kann durch dieses mit Leichtigkeit nicht nur die Glieder sechster Ordnung sondern auch die der siebenten erhalten, die mit denen der sechsten Ordnung in ähnlicher Verbindung stehen, wie dem Vorhergehenden zufolge die Glieder der fünften mit denen der vierten Ordnung.

105.

Von dem im Vorhergehenden behandelten Falle, welcher sich speciel auf das Revolutionsellipsoid bezieht, möchte es sowohl aus den im vor. Art., wie aus den im Art. 78 angeführten Gründen angemessen

erscheinen auf den allgemeinen Fall über zu gehen, und die Reduction eines Dreiecks von kleinen Seiten, die kürzeste Linien auf irgend einer beliebigen Oberfläche sind, auf ein sphärisches Dreieck von denselben Seiten abzuleiten, und hiebei eine Ordnung und bez. zwei Ordnungen weiter zu gehen, wie von Gauss geschehen ist.

Wenn man in den Gleichungen (3), (4), (5) des ersten Abschnittes σ statt h, h statt s, φ statt q, und ψ statt α schreibt, so werden sie

$$dh^2 = d\sigma^2 + m^2 d\varphi^2 \qquad \ldots\ldots (113)$$

$$\left.\begin{aligned} d\sigma &= dh \cos\psi \\ m d\varphi &= dh \sin\psi \\ \left(\frac{dm}{d\sigma}\right) d\varphi &= -\, d\psi \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (114)$$

Zuerst ist hier zu bemerken, dass wie auch die Oberfläche, auf welcher die Linien h und σ liegen sollen, und die Linie h selbst, beschaffen seien, σ immer eine kürzeste Linie ist. Denn macht man $d\varphi = 0$, wodurch $h = \sigma$ wird, so sind die Gleichungen (114), von welchen die letzte die Bedingungsgleichung des Minimums von h ist, von selbst erfüllt. Diese Eigenschaft der Gleichung (113), welche im Art. 7 in Bezug auf das Revolutionsellipsoid hervorgehoben wurde, findet also für jede Oberfläche statt. Es wird weiter unten von diesem wichtigen Satze ein zweiter Beweis erlangt werden.

106.

Das Integral der Gleichung (113) kann, auch wenn man von den (114) absieht, auf folgende Weise construirt werden. Jedenfalls muss aber irgend eine reelle Relation zwischen σ und φ angenommen werden, denn wenn eine solche nicht vorhanden ist, so kann jede beliebige stetige oder unstetige Linie ohne Fortschreitungsgesetz als das Integral der (113) betrachtet werden.

Von einem beliebigen Punkt auf einer beliebigen Oberfläche, den ich mit A bezeichnen will, anfangend ziehe man eine beliebige kürzeste Linie, die als diejenige σ betrachtet werden soll, für welche $\varphi = 0$ ist. Auf der Seite dieser Linie, auf welcher man φ wachsend annehmen will, ziehe man ausserdem, so nahe an einander wie möglich, auch von A anfangend eine beliebige Anzahl kürzester Linien σ, und nenne den Winkel, den das erste Element einer jeden derselben mit dem ersten

Element der ersten Linie σ macht φ, so dass sich alle diese Linien nur durch den Werth von φ, der einer jeden derselben zukommt, unterscheiden. Es ist nun klar, dass durch die zwischen σ und φ angenommene Relation die Länge einer jeden der Linien σ gegeben ist, trägt man diese Längen auf, und zieht durch die Endpunkte aller σ eine Linie, so ist die Länge dieser $=h$.

Das Produkt $md\varphi$ ist das erste Element der durch den Endpunkt irgend einer der Linien σ auf der Oberfläche gelegten senkrechten Linie, welches mit einem, mit dem Halbmesser m beschriebenen, unendlich kleinen Kreisbogen zusammen fällt. Durch die Gleichungen (2), und durch die Verbindung, in welcher die darin vorkommenden Coefficienten E, F, G mit den rechtwinklichen Coordinaten der Oberfläche stehen, kann man m in Function von σ und φ ausdrücken, auch giebt es dazu noch ein anderes Mittel, wie man weiter unten sehen wird.

Wenn die zwischen σ und φ angenommene Relation so beschaffen ist, dass immer einem reellen Werth von φ nur Ein reeller Werth von σ entspricht, so besteht das Integral nur aus Einer Linie h, wenn aber Einem reellen Werthe von φ mehrere reelle Werthe von σ entsprechen, so wird das Integral aus mehreren Linien h bestehen. Ist die zwischen φ und σ angenommene Relation mit der letzten Gleichung (114) identisch, so ist die durch die Endpunkte der Linien σ gezogene Linie h nicht minder wie jene eine kürzeste Linie auf der Oberfläche.

Es folgt hieraus, dass man durch die Integration der Gleichungen (113) und (114), oder vielmehr blos durch die der (114), die schon die Gleichung (113) in sich schliessen, auf jeder beliebigen Oberfläche ein beliebiges Dreieck bilden kann, dessen Seiten kürzeste Linien sind. Dieses Dreieck soll im Folgenden zur Abkürzung schlechtweg ein sphäroidisches Dreieck genannt werden, und in demselben sind die zwei Seiten die Linien σ, die den Werthen $\varphi=0$ und $\varphi=\varphi$ angehören; die dritte Seite ist die Linie h. Der Winkel zwischen den beiden Seiten, die von den zwei Linien σ gebildet werden ist φ, und da zufolge des Art. 3 ψ der Winkel ist, unter welchem die Linie h in irgend einem Punkt von der betreffenden Linie σ geschnitten wird, so sind die beiden anderen Winkel unsers sphäroidischen Dreiecks die Werthe von ψ für $\varphi=0$ und $\varphi=\varphi$.

107.

Um die Integration der (114) analytisch auszuführen muss vor Allem m in Function von σ und φ dargestellt werden, und dieses kann, da beides σ und h als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden sollen, durch Zuziehung von unendlichen Reihen geschehen, die stets schnell convergiren werden, wenn σ und h nicht allzugross angenommen werden. Um den Ausdruck von m durch σ und φ zu erhalten werde ich ein anderes Verfahren wie das eben angedeutete anwenden, und mich des Krümmungsmaasses der Oberfläche in dem Sinne, in welchem Gauss es in die Wissenschaft eingeführt hat, bedienen. Es wird dadurch eine grössere Einfachheit und Regelmässigkeit in den Entwickelungen erlangt werden, da die Relation zwischen m und dem Krümmungsmaasse der Oberfläche so sehr einfach ist.

»Das Krümmungsmaass irgend eines Punkts einer Oberfläche wird »ausgedrückt durch einen Bruch, dessen Zähler Eins ist, und dessen »Nenner aus dem Produkt der beiden Hauptkrümmungshalbmesser die»ses Punkts besteht.«

Aus der Theorie der Oberflächen weiss man, dass die beiden Hauptkrümmungshalbmesser irgend eines Punkts derselben sich als die Wurzeln Einer quadratischen Gleichung darstellen lassen, deren letztes Glied, wenn man den Coefficienten des ersten Gliedes gleich Eins macht, den folgenden Ausdruck hat,

$$\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}$$

wenn man die Oberfläche auf die rechtwinklichen Coordinaten x, y, z bezieht, z als Function von x und y betrachtet, und wie gewöhnlich

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$
$$r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad s = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right), \quad t = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

setzt*). Der Theorie der algebraischen Gleichungen zufolge ist dieser Ausdruck das Produkt der beiden in Rede stehenden Hauptkrümmungshalbmesser, und es hat daher allgemein das Krümmungsmaass, wenn es mit $\varkappa$ bezeichnet wird,

---

*) Man findet diese quadratische Gleichung in vielen Handbüchern, siehe u. a. Cournot, Theorie der Functionen, p. 292 der Uebers. von Schnuse.

(115) . . . . $\varkappa = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$

zum Ausdruck. Wählt man die Lage der Coordinaten so, dass ihr Anfangspunkt in dem betrachteten Punkt A der Oberfläche liegt, die Ebene der xy mit der Berührungsebene im Punkt A zusammen fällt, und die Achse der x in einer der beiden Hauptkrümmungsebenen, die durch A gehen, liegt, dann ist bekanntlich

$$p = 0\,, \quad q = 0\,, \quad s = 0$$

und der vorstehende Ausdruck giebt

$$\varkappa = rt$$

mit der obigen Definition des Krümmungsmaasses übereinstimmend, da bei dieser Lage der Coordinatenachsen die Hauptkrümmungshalbmesser des Punkts A $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{t}$ zum Ausdruck haben.

108.

Man erhält die Relation zwischen $\varkappa$ und m durch die folgende Analyse, die von der Gaussischen wesentlich verschieden ist. Die Form (113) des Ausdrucks des Quadrats irgend eines Linearelements auf irgend einer Oberfläche, die mit der (3) des Art. 3 identisch ist, kann als unmittelbar aus der Gleichung (1) hervorgegangen betrachtet werden, wenn man die sechs Coefficienten η, θ, μ, η', θ', μ' in demselben Sinne wie dort aufnimmt, aber die Bedingungsgleichungen

(116)
$$\begin{cases} \eta^2 + \theta^2 + \mu^2 = 1 \\ \eta\eta' + \theta\theta' + \mu\mu' = 0 \end{cases}$$
einführt, und
$$\eta'^2 + \theta'^2 + \mu'^2 = m^2$$

setzt. Da nun in den hier angewandten Bezeichnungen

(117) . . . .
$$\begin{cases} dx = \eta d\sigma + \eta' d\varphi \\ dy = \theta d\sigma + \theta' d\varphi \\ dz = \mu d\sigma + \mu' d\varphi \end{cases}$$

ist, so erhalten wir durch die Elimination aus diesen Gleichungen

$$0 = A dx + B dy + C dz$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} A &= \theta'\mu - \theta\mu' \\ B &= \mu'\eta - \mu\eta' \\ C &= \eta'\theta - \eta\theta' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

gesetzt wird. Hieraus folgt sogleich

$$p = -\frac{A}{C}\,; \qquad q = -\frac{B}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

und

$$C^2(1 + p^2 + q^2) = A^2 + B^2 + C^2$$

Erhebt man die (118) ins Quadrat und addirt, so ergiebt sich zuerst

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 = \theta'^2\mu^2 &- 2\theta\theta'\mu\mu' + \theta^2\mu'^2 \\ + \mu'^2\eta^2 &- 2\eta\eta'\mu\mu' + \mu^2\eta'^2 \\ + \eta'^2\theta^2 &- 2\eta\eta'\theta\theta' + \eta^2\theta'^2 \end{aligned}$$

Die zweite (116) giebt aber

$$\begin{aligned} \eta\eta'\mu\mu' + \theta\theta'\mu\mu' + \mu^2\mu'^2 &= 0 \\ \eta\eta'\theta\theta' + \theta^2\theta'^2 + \theta\theta'\mu\mu' &= 0 \\ \eta^2\eta'^2 + \eta\eta'\theta\theta' + \eta\eta'\mu\mu' &= 0 \end{aligned}$$

also

$$2\theta\theta'\mu\mu' + 2\eta\eta'\mu\mu' + 2\eta\eta'\theta\theta' + \eta^2\eta'^2 + \theta^2\theta'^2 + \mu^2\mu'^2 = 0$$

und addirt man diese zur vorstehenden, so wird sogleich

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= \eta^2(\eta'^2 + \theta'^2 + \mu'^2) \\ &+ \theta^2(\eta'^2 + \theta'^2 + \mu'^2) \\ &+ \mu^2(\eta'^2 + \theta'^2 + \mu'^2) \end{aligned}$$

also in Folge der ersten und dritten (116)

$$C^2(1 + p^2 + q^2) = m^2$$

109.

Um die Ausdrücke für r, s, t, zu erhalten, nehme ich zuerst die vollständigen Differentiale der Gleichungen (119). Diese sind, wenn man für einen Augenblick

$$\begin{aligned} P &= A\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - C\left(\frac{dA}{d\sigma}\right)\,; \quad & P' &= A\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - C\left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \\ Q &= B\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - C\left(\frac{dB}{d\sigma}\right)\,; \quad & Q' &= B\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - C\left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \end{aligned}$$

setzt,

$$C^2dp = Pd\sigma + P'd\varphi\;; \qquad C^2dq = Qd\sigma + Q'd\varphi$$

Die Gleichungen (117) geben aber durch die Elimination

$$Cd\sigma = -\theta' dx + \eta' dy$$
$$Cd\varphi = \theta dx - \eta dy$$

und da $\frac{dp}{dx} = r$, $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s$, $\frac{dq}{dy} = t$ ist, so geben die eben erhaltenen Gleichungen nach der Elimination von $d\sigma$ und $d\varphi$,

$$C^3 r = -\theta' P + \theta P'$$
$$C^3 s = \eta' P - \eta P' = -\theta' Q + \theta Q'$$
$$C^3 t = \eta' Q - \eta Q'$$

woraus mit Berücksichtigung der dritten (118)

$$C^5 (rt - s^2) = P'Q - PQ'$$

und nach der Substitution der obigen Ausdrücke für P, P', Q, Q',

$$\begin{aligned} C^4 (rt - s^2) = A & \left\{ \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) \right\} \\ + B & \left\{ \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) \right\} \\ + C & \left\{ \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \right\} \end{aligned}$$

folgt. Man kann diesem Ausdruck noch eine andere Form geben, nemlich

(120) . . . . . $C^4 (rt - s^2) = R - S$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} R = & \left\{ \theta \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \mu \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \right\} \left\{ \mu' \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \theta' \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) \right\} \\ + & \left\{ \mu \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) - \eta \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) \right\} \left\{ \eta' \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \mu' \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \right\} \\ + & \left\{ \eta \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) - \theta \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \right\} \left\{ \theta' \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) - \eta' \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) \right\} \\ S = & \left\{ \theta \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \mu \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) \right\} \left\{ \mu' \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) - \theta' \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) \right\} \\ + & \left\{ \mu \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) - \eta \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) \right\} \left\{ \eta' \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \mu' \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \right\} \\ + & \left\{ \eta \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \theta \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \right\} \left\{ \theta' \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) - \eta' \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \right\} \end{aligned}$$

gesetzt wird. Die Identität dieses Ausdrucks mit dem vorhergehenden ist leicht nachzuweisen, und beruht wieder auf die Gleichungen (118); er ist dem Aeussern nach zwar weniger einfach wie jener, eignet sich aber besser zu den noch auszuführenden Entwickelungen.

110.

Da jetzt die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten x, y, z in Bezug auf σ und φ eintreten werden, so sollen zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen angewandt werden,

$$\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right) = \alpha\,,\ \left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\eta'}{d\sigma}\right) = \alpha'\,,\ \left(\frac{d\eta'}{d\varphi}\right) = \alpha''$$
$$\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right) = \beta\,,\ \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\theta'}{d\sigma}\right) = \beta'\,,\ \left(\frac{d\theta'}{d\varphi}\right) = \beta''$$
$$\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right) = \gamma\,,\ \left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\mu'}{d\sigma}\right) = \gamma'\,,\ \left(\frac{d\mu'}{d\varphi}\right) = \gamma''$$

Differentiirt man hierauf die drei Gleichungen (116) theils nach σ, theils nach φ, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\eta\alpha + \theta\beta + \mu\gamma = 0\\
&\eta\alpha' + \theta\beta' + \mu\gamma' = 0\\
&\eta'\alpha + \theta'\beta + \mu'\gamma = 0\\
&\eta\alpha'' + \theta\beta'' + \mu\gamma'' + \eta'\alpha' + \theta'\beta' + \mu'\gamma' = 0\\
&\eta'\alpha' + \theta'\beta' + \mu'\gamma' = m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\eta'\alpha'' + \theta'\beta'' + \mu'\gamma'' = m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (121)$$

aus welchen die in der Gleichung (120) enthaltenen Factoren leicht gebildet werden können. Durch einfache Eliminationen, und mit Zuziehung der (118) findet man aus diesen Gleichungen zuerst die folgenden drei Gruppen,

$$\begin{aligned}
&\gamma B - \beta C = 0\\
&\alpha C - \gamma A = 0\\
&\beta A - \alpha B = 0\\
\hline
&\gamma' B - \beta' C = \eta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\alpha' C - \gamma' A = \theta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\beta' A - \alpha' B = \mu m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
\hline
&\gamma'' B - \beta'' C = \eta m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) + \eta' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\alpha'' C - \gamma'' A = \theta m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) + \theta' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\beta'' A - \alpha'' B = \mu m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) + \mu' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Die erste dieser Gruppen erhält man, wenn man nach einander α, β, γ aus der ersten und dritten (121) eliminirt, die zweite Gruppe eben so aus der zweiten und fünften (121), und die dritte Gruppe eben so aus der vierten und sechsten mit Zuziehung der fünften.

Mit Berücksichtigung der (116) geben ferner die (118) die folgenden zwei Gruppen von Gleichungen,

$$\begin{aligned} \theta C - \mu B &= \eta' \\ \mu A - \eta C &= \theta' \\ \eta B - \theta A &= \mu' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu' B - \theta' C &= \eta m^2 \\ \eta' C - \mu' A &= \theta m^2 \\ \theta' A - \eta' B &= \mu m^2 \end{aligned}$$

deren Ableitung sich durch die Zusammensetzung der linken Seiten von selbst zu erkennen giebt. Differentiirt man nun diese theils nach σ, theils nach φ, so erhält man in Folge der vorhergehenden drei Gruppen von Gleichungen die folgenden,

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \mu\left(\frac{dB}{d\sigma}\right) &= \alpha' \\ \mu\left(\frac{dA}{d\sigma}\right) - \eta\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) &= \beta' \\ \eta\left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \theta\left(\frac{dA}{d\sigma}\right) &= \gamma' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \mu\left(\frac{dB}{d\varphi}\right) &= \alpha'' + \eta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \mu\left(\frac{dA}{d\varphi}\right) - \eta\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) &= \beta'' + \theta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \eta\left(\frac{dB}{d\varphi}\right) - \theta\left(\frac{dA}{d\varphi}\right) &= \gamma'' + \mu m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu'\left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \theta'\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) &= \alpha m^2 + \eta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \eta'\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \mu'\left(\frac{dA}{d\sigma}\right) &= \beta m^2 + \theta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \theta'\left(\frac{dA}{d\sigma}\right) - \eta'\left(\frac{dB}{d\sigma}\right) &= \gamma m^2 + \mu m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu'\left(\frac{dB}{d\varphi}\right) - \theta'\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) &= \alpha' m^2 + \eta m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) - \eta' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \eta'\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \mu'\left(\frac{dA}{d\varphi}\right) &= \beta' m^2 + \theta m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) - \theta' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \theta'\left(\frac{dA}{d\varphi}\right) - \eta'\left(\frac{dB}{d\varphi}\right) &= \gamma' m^2 + \mu m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) - \mu' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \end{aligned}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind die Factoren, aus welchen die Ausdrücke für R und S des vor. Art. bestehen, substituirt man sie und berücksichtigt die (121) und (116), so wird sogleich

$$R = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\, m^2$$
$$S = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\, m^2 - m^2 \left(\frac{dm}{d\sigma}\right)^2$$

folglich

$$C^4(rt - s^2) = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2)\, m^2 + m^2 \left(\frac{dm}{d\sigma}\right)^2$$

Die Differentiation der dritten und fünften der (121) giebt aber

$$\eta \left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right) + \theta' \left(\frac{d\beta}{d\varphi}\right) + \mu' \left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right) + \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0$$
$$\eta' \left(\frac{d\alpha'}{d\sigma}\right) + \theta' \left(\frac{d\beta'}{d\sigma}\right) + \mu' \left(\frac{d\gamma'}{d\sigma}\right) + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = m\left(\frac{d^2m}{d\sigma^2}\right) + \left(\frac{dm}{d\sigma}\right)^2$$

und da

$$\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\alpha'}{d\sigma}\right), \quad \left(\frac{d\beta}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\beta'}{d\sigma}\right), \quad \left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\gamma'}{d\sigma}\right)$$

sind, indem beide hier einander gleichgesetzte Functionen bez. $\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma d\varphi}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{d\sigma d\varphi}\right)$, $\left(\frac{d^2\mu}{d\sigma d\varphi}\right)$ ausdrücken, so ergiebt sich

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 = -m\left(\frac{d^2m}{d\sigma^2}\right) - \left(\frac{dm}{d\sigma}\right)^2$$

womit

$$C^4(rt - s^2) = -m^3 \left(\frac{d^2m}{d\sigma^2}\right)$$

wird. Setzt man nun sowohl diesen Ausdruck wie den am Ende des Art. 108 erhaltenen in (115), so wird der allgemeine Ausdruck des Krümmungsmaasses

$$\varkappa = -\frac{1}{m}\left(\frac{d^2m}{d\sigma^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (122)$$

welcher voraussetzt, dass die rechtwinklichen Coordinaten der Oberfläche in Function der unabhängigen Veränderlichen σ und φ dargestellt werden.

111.

Um $\varkappa$ in eine nach den Potenzen von σ fortschreitende Reihe zu entwickeln bedienen wir uns am Einfachsten des Ausdrucks (115). Bezeichnen wir mit $\varkappa_0$, $\left(\frac{d\varkappa}{d\sigma}\right)_0$, $\left(\frac{d^2\varkappa}{d\sigma^2}\right)_0$, etc. die Werthe dieser Functio-

nen für den Punkt A, in welchem $\sigma = 0$ ist, so wird in Folge eines bekannten Satzes

$$(123)\qquad x = x_0 + \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0 \sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)\sigma^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3x}{d\sigma^3}\right)_0 \sigma^3 + \ldots$$

Um die Ausdrücke der in dieser Gleichung vorkommenden Differentialquotienten erhalten zu können, müssen wir die Relationen kennen lernen, die zwischen den Differentialen der rechtwinklichen Coordinaten x, y, z der Oberfläche in Bezug auf σ statt finden, und diese ergeben sich leicht aus den vorhergehenden Entwickelungen. Zufolge der Bedeutung der im Art. 110 eingeführten Functionen α, β, γ, etc. können die erste und die dritte der (121) wie folgt geschrieben werden,

$$\eta\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + \theta\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + \mu\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$
$$\eta'\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + \theta'\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + \mu'\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

eliminirt man hieraus wechselsweise $\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)$, so ergeben sich

$$(\eta\theta' - \eta'\theta)\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + (\mu\theta' - \mu'\theta)\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$
$$(\eta\theta' - \eta'\theta)\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + (\eta\mu' - \eta'\mu\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

die wenn man z als Function von x und y betrachtet, in Folge der (118) und (119) in die folgenden übergehen,

$$(124)\quad .\quad \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + p\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0\,,\quad \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + q\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

welche die gesuchten Relationen sind.

112.

Die eben erhaltenen Relationen (124) enthalten zunächst den im Art. 105 angekündigten zweiten Beweis des dort erhaltenen Satzes, denn sie geben sich in Bezug auf die Linie σ als die bekannten Bedingungsgleichungen der kürzesten Linie auf einer beliebigen Oberfläche zu erkennen, von deren Coordinaten man z als Function von x und y betrachtet, und sind hier ohne die Bedingung des Minimums einzuführen erhalten worden.*) Sie haben sich als nothwendige Folge der beiden

*) Die Variation der Gleichung $\sigma = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ist

ersten (116), die die Form der (113) bedingen, und von welchen die erste und dritte der (121) die Differentiale nach σ sind, gezeigt. Der Satz selbst, der den Schlüssel zu manchen Sätzen der angezogenen Gaussischen Abhandlung enthält, kann nun wie folgt ausgesprochen werden:

»Wenn man die rechtwinklichen Coordinaten irgend einer Ober»fläche dergestalt in Function von zwei neuen, unabhängigen Veränder»lichen σ und φ ausdrückt, dass dadurch der Ausdruck des Quadrats des »Elements dh irgend einer auf dieser Oberfläche gezogenen Linie h die »Form

$$dh^2 = d\sigma^2 + m^2 d\varphi^2$$

»annimmt, so ist nothwendig σ eine kürzeste Linie auf dieser Ober»fläche, wie auch die Linie h beschaffen sei.«*)

$$\delta\sigma = \int \left\{ \left(\frac{dx}{d\sigma}\right) \delta dx + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right) \delta dy + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right) \delta dz \right\}$$
$$= \left(\frac{dx}{d\sigma}\right) \delta x + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right) \delta y + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right) \delta z$$
$$- \int \left\{ \delta x d. \left(\frac{dx}{d\sigma}\right) + \delta y d. \left(\frac{dy}{d\sigma}\right) + \delta z d. \left(\frac{dz}{d\sigma}\right) \right\}$$

Die Gleichung der Oberfläche giebt aber, wenn z als Function von x und y betrachtet wird,

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

Eliminirt man hiemit δz unter dem Integralzeichen des Ausdrucks der Variation $\delta\sigma$, und setzt hierauf die Coefficienten von δx und δy, jeden für sich, gleich Null, so ergiebt sich

$$d. \left(\frac{dx}{d\sigma}\right) + pd. \left(\frac{dz}{d\sigma}\right) = 0 \;,\quad d. \left(\frac{dy}{d\sigma}\right) + qd. \left(\frac{dz}{d\sigma}\right) = 0$$

oder, da hier $d\sigma$ als constant betrachtet werden darf,

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + p\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0 \;,\quad \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + q\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

welche die durch die Bedingung des Minimums von σ abgeleiteten Bedingungsgleichungen, und mit den (124) identisch sind.

*) Die bekannte Differentialgleichung für die Rectification von ebenen, auf Polarcoordinaten bezogenen Linien, nemlich

$$dh^2 = d\sigma^2 + \sigma^2 d\varphi^2$$

stellt sich hiemit um so mehr als ein specieller Fall der obigen allgemeinen Differentialgleichung dar. Denn hier ist nicht nur der Radius Vector σ ein specieller Werth von m, sondern auch eine gerade Linie, mit anderen Worten eine kürzeste Linie auf der hier in Betracht kommenden Oberfläche, nemlich der Ebene.

Untersucht man das Entgegengesetzte des im Text bewiesenen Satzes, so findet man, dass nicht blos bei der obigen Form von dh, sondern auch bei unzählich vielen anderen, σ eine kürzeste Linie ist. Obgleich ich für diesen entgegengesetzten Satz

113.

Geben wir nun zur Entwickelung der Coefficienten des Ausdrucks (123) über, so wird diese am Einfachsten durchgeführt, wenn man den

---

keine Anwendung im Sinne habe, so halte ich doch für angemessen ihn zu beweisen. Sei daher hier

$$dh^2 = E d\sigma^2 + 2 F d\sigma d\varphi + G d\varphi^2$$

wo wieder

$$E = \eta^2 + \theta^2 + \mu^2$$
$$F = \eta\eta' + \theta\theta' + \mu\mu'$$
$$G = \eta'^2 + \theta'^2 + \mu'^2$$

sind. Wenn man nun nach den Bedingungen fragt, unter welchen in dieser Form von dh die Linie σ eine kürzeste auf der Oberfläche ist, so müssen vor Allem die Gleichungen (124) statt finden, und von diesen gelangt man auf die entgegengesetzte Art, wie im Text, auf die Bedingungsgleichungen

$$\eta\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + \theta\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + \mu\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$
$$\eta'\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + \theta'\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + \mu'\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

Die vorstehenden Ausdrücke für E und F geben aber durch die Differentiation

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dE}{d\sigma}\right) = \eta\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + \theta\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + \mu\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{dE}{d\varphi}\right) = \eta\left(\frac{d^2x}{d\sigma\, d\varphi}\right) + \theta\left(\frac{d^2y}{d\sigma\, d\varphi}\right) + \mu\left(\frac{d^2z}{d\sigma\, d\varphi}\right)$$
$$\left(\frac{dF}{d\sigma}\right) = \eta'\left(\frac{d^2x}{d^2\sigma}\right) + \theta'\left(\frac{d^2y}{d^2\sigma}\right) + \mu'\left(\frac{d^2z}{d^2\sigma}\right)$$
$$+ \eta\left(\frac{d^2x}{d\sigma\, d\varphi}\right) + \theta\left(\frac{d^2y}{d\sigma\, d\varphi}\right) + \mu\left(\frac{d^2z}{d\sigma\, d\varphi}\right)$$

also in Folge der vorstehenden Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{dE}{d\sigma}\right) = 0$$
$$\left(\frac{dF}{d\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dE}{d\varphi}\right)$$

Die Integrale dieser beiden partiellen Differentialgleichungen sind

$$E = f\varphi\,, \quad F = \frac{1}{2}\,\sigma\left(\frac{dE}{d\varphi}\right) + f'\varphi$$

wo $f\varphi$ und $f'\varphi$ zwei willkührliche Functionen von φ bezeichnen, die kein σ enthalten dürfen. Also jedes Mal, wenn E und F diesen beiden Gleichungen gnügen, ist σ eine kürzeste Linie auf der Oberfläche, und die Fälle, wo dieses statt findet, sind wegen der willkührlichen Functionen von φ unzählich. Der im Satze des Textes vorkommende Fall ist ein specieller dieses allgemeinen, welcher dadurch herbeigeführt wird, dass man $f\varphi = 1$, und $f'\varphi = 0$ setzt.

Coordinaten x, y, z eine solche Lage giebt, dass sie im Punkt A anfangen, die Ebene der xy mit der Berührungsebene in A zusammen fällt, und die x Achse in einer der beiden Hauptkrümmungsebenen des Punkts A liegt. Hieraus folgt zunächst

$$p_0 = 0\ ,\quad q_0 = 0\ ,\quad s_0 = 0$$

und nennt man den Winkel, den das erste Element der Linie σ mit dem positiven Theil der x Achse macht χ, dann wird ausserdem

$$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0 = \cos\chi\ ,\quad \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0 = \sin\chi$$

Die Gleichungen (124) geben hierauf

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)_0 = 0\ ,\quad \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)_0 = 0$$

und differentiirt man dieselben, nebst der Gleichung

$$dz = pdx + qdy$$

der Oberfläche, so bekommt man nach Einführung der obigen Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{d^3x}{d\sigma^3}\right)_0 = -\,r^2_0 \cos^3\chi - r_0 t_0 \sin^2\chi \cos\chi$$

$$\left(\frac{d^3y}{d\sigma^3}\right)_0 = -\,r_0 t_0 \sin\chi \cos^2\chi - t^2_0 \sin^3\chi$$

Weiter brauchen wir diese Differentiale nicht fortzusetzen. Um die Gleichung (115) auf möglichst einfache Art zu differentiiren setze ich

$$A = rt - s^2\ ;\quad B = p^2 + q^2$$

wodurch

$$\varkappa = \frac{A}{(1 + B)^2}$$

erhalten wird. Differentiirt man nun diese Ausdrücke für A und B drei Mal, und berücksichtigt die vorstehenden Bedingungsgleichungen, wozu auch die für die zweiten und dritten Differentiale von x und y in Bezug auf σ erhaltenen, auf den Punkt A bezogenen, Ausdrücke gehören, so ergiebt sich

$$A_0 = r_0 t_0$$

$$\left(\frac{dA}{d\sigma}\right)_0 = \left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0 \cos\chi + \left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0 \sin\chi$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2A}{d\sigma^2}\right)_0 = & \left\{\left(\frac{d^2.rt}{dx^2}\right)_0 - 2\left(\frac{dr}{dy}\right)_0^2\right\} \cos^2\chi \\ & + 2\left\{\left(\frac{d^2.rt}{dxdy}\right)_0 - 2\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 \left(\frac{dt}{dx}\right)_0\right\} \sin\chi\cos\chi \\ & + \left\{\left(\frac{d^2.rt}{dy^2}\right)_0 - 2\left(\frac{dt}{dx}\right)_0^2\right\} \sin^2\chi\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^3A}{d\sigma^3}\right)_0 = \left\{\left(\frac{d^3.rt}{dx^3}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - r_0^2\left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0\right\}\cos^3\chi$$
$$+\left\{3\left(\frac{d^3rt}{dx^2dy}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - 12\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - r_0t_0\left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0\right\}\sin\chi\cos^2\chi$$
$$+\left\{3\left(\frac{d^3.rt}{dx\,dy^2}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - 12\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - r_0t_0\left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0\right\}\sin^2\chi\cos\chi$$
$$+\left\{\left(\frac{d^3.rt}{dy^3}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - t_0^2\left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0\right\}\sin^3\chi$$

$$B_0 = 0$$

$$\left(\frac{dB}{d\sigma}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^2B}{d\sigma^2}\right)_0 = 2r_0^2\cos^2\chi + 2t_0^2\sin^2\chi$$

$$\left(\frac{d^3B}{d\sigma^3}\right)_0 = 6\,r_0\left(\frac{dr}{dx}\right)_0\cos^3\chi + \left\{12\,r_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 + 6\,t_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0\right\}\sin\chi\cos^2\chi$$
$$+\left\{12\,t_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 + 6\,r_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0\right\}\sin^2\chi\cos\chi + 6\,t_0\left(\frac{dt}{dy}\right)_0\sin^3\chi$$

und differentiirt man auch den Ausdruck für $\varkappa$, so erhält man durch Zuziehung der Bedingungsgleichungen,

$$\varkappa_0 = A_0$$
$$\left(\frac{d\varkappa}{d\sigma}\right)_0 = \left(\frac{dA}{d\sigma}\right)_0$$
$$\left(\frac{d^2\varkappa}{d\sigma^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2A}{d\sigma^2}\right)_0 - 2\,A_0\left(\frac{d^2B_0}{d\sigma^2}\right)_0$$
$$\left(\frac{d^3\varkappa}{d\sigma^3}\right)_0 = \left(\frac{d^3A}{d\sigma^3}\right)_0 - 6\left(\frac{dA}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{d^2B}{d\sigma^2}\right)_0 - 2\,A_0\left(\frac{d^3B}{d\sigma^3}\right)_0$$

Vor der Substitution dieser Ausdrücke ist φ, welcher Winkel von einem beliebigen Anfangspunkt zu zählen ist, statt χ, welcher einen bestimmten Anfangspunkt hat, einzuführen. Sei v der Winkel, den das erste Element derjenigen kürzesten Linie σ, für welche $\varphi = 0$ sein soll, mit der Hauptkrümmungsebene, in welcher die x Achse liegt, nach der positiven Seite der x macht, dann wird, wenn man v und φ in derselben Richtung wachsen lässt,

$$\chi = v + \varphi$$

Führt man diesen Werth von χ in die obigen Ausdrücke ein, setzt zur Abkürzung

$$\eta = r_0t_0$$
$$\nu = \left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0, \quad \nu' = \left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0$$
$$\pi = \left(\frac{d^2.rt}{dx^2}\right)_0 - 2\left(\frac{dr}{dy}\right)_0^2 - 4\,r_0^3t_0$$
$$\pi' = \left(\frac{d^2.rt}{dx\,dy}\right)_0 - 2\left(\frac{dr}{dy}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0$$

$$\pi'' = \left(\frac{d^2.rt}{dy^2}\right)_0 - 2\left(\frac{dt}{dx}\right)_0^2 - 4r_0 t_0^3$$

$$\varrho = \left(\frac{d^2.rt}{dx^2}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right)_0 \cdot \left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - 12\,r_0^2 t_0 \left(\frac{dr}{dx}\right)_0 - 13\,r_0^2 \left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0$$

$$\varrho' = \left(\frac{d.^2rt}{dx^2dy}\right)_0 - 4\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)_0 \left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - 2\left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right)_0 \left(\frac{dt}{dx}\right)_0$$
$$- 8r_0^2 t_0 \left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - 4\,r_0 t_0^2 \left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - 4\,r_0^2 \left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0 - \frac{1}{3} r_0 t_0 \left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0$$

$$\varrho'' = \left(\frac{d^2.rt}{dx\,dy^2}\right) - 4\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - 2\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)_0 \left(\frac{dr}{dy}\right)_0$$
$$- 8\,r_0 t_0^2 \left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - 4\,r_0^2 t_0 \left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - 4\,t_0^2 \left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0 - \frac{1}{3} r_0 t_0 \left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0$$

$$\varrho''' = \left(\frac{d^2.rt}{dy^2}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)_0 \left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - 12\,r_0 t_0^2 \left(\frac{dt}{dy}\right)_0 - 13\,t_0^2 \left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0$$

und ferner

$$\theta = \nu\cos v + \nu'\sin v$$
$$\theta' = \nu'\cos v - \nu\sin v$$
$$\lambda = \pi\cos^2 v + 2\pi'\sin v\cos v + \pi''\sin^2 v$$
$$\lambda' = \pi'\cos^2 v + (\pi'' - \pi)\sin v\cos v - \pi'\sin^2 v$$
$$\lambda'' = \pi''\cos^2 v - 2\pi'\sin v\cos v + \pi\sin^2 v$$
$$\mu = \varrho\cos^3 v + 3\varrho'\sin v\cos^2 v + 3\varrho''\sin^2 v\cos v + \varrho'''\sin^3 v$$
$$\mu' = \varrho'\cos^3 v + (2\varrho'' - \varrho)\sin v\cos^2 v + (\varrho''' - 2\varrho')\sin^2 v\cos v - \varrho''\sin^3 v$$
$$\mu'' = \varrho''\cos^3 v + (\varrho''' - 2\varrho')\sin v\cos^2 v + (\varrho - 2\varrho'')\sin^2 v\cos v + \varrho'\sin^3 v$$
$$\mu''' = \varrho'''\cos^3 v - 3\varrho''\sin v\cos^2 v + 3\varrho'\sin^2 v\cos v - \varrho\sin^3 v$$

dann giebt die Substitution

$$\varkappa = \eta + \theta\sigma\cos\varphi + \theta'\sigma\sin\varphi + \frac{1}{2}\lambda\sigma^2\cos^2\varphi + \lambda'\sigma^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\lambda''\sigma^2\sin^2\varphi$$
$$+ \frac{1}{6}\mu\sigma^3\cos^3\varphi + \frac{1}{2}\mu'\sigma^3\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\mu''\sigma^3\sin^2\varphi\cos\varphi + \frac{1}{6}\mu'''\sigma^3\sin^3\varphi \quad (125)$$

wodurch $\varkappa$ in Function von σ und φ dargestellt ist,

114.

Um auch m in Function derselben Grössen darzustellen, dient die Gleichung (122), in welcher zu diesem Zweck σ als unabhängige Veränderliche, und φ als eine Constante betrachtet werden dürfen. Sei demgemäss zur Abkürzung statt der (125)

$$\varkappa = \eta + A\sigma + \frac{1}{2}B\sigma^2 + \frac{1}{6}C\sigma^3$$

dann ist, um den Ausdruck für m zu erhalten der Gleichung

$$d^2m + m\left(\eta + A\sigma + \frac{1}{2}B\sigma^2 + \frac{1}{6}C\sigma^3\right)d\sigma^2 = 0$$

Gnüge zu leisten. Da m und σ zugleich Null werden müssen, der Coefficient von σ im Ausdruck von m nothwendig $= 1$ werden muss, und auch leicht erkannt werden kann, dass in m kein mit σ^2 multiplicirtes Glied vorkommen wird, so kann gesetzt werden

$$m = \sigma + \alpha\sigma^3 + \beta\sigma^4 + \gamma\sigma^5 + \delta\sigma^6 + \ldots$$

wo α, β, etc. unbestimmte Coefficienten sind. Die Substitution dieses Ausdrucks in die vorstehende Differentialgleichung führt auf die folgenden Bedingungsgleichungen,

$$0 = 6\alpha + \eta\ ; \quad 0 = 12\beta + A$$

$$0 = 20\gamma + \frac{1}{2}B + \alpha\eta;\ 0 = 30\delta + \frac{1}{6}C + \alpha A + \beta\eta$$

woraus

$$\alpha = -\frac{1}{6}\eta\ ;\ \beta = -\frac{1}{12}A\ ;\ \gamma = -\frac{1}{40}B + \frac{1}{120}\eta^2\ ;\ \delta = -\frac{1}{180}C + \frac{1}{120}\eta A$$

folgt. Die Substitution der Werthe von A, B, C giebt hierauf

$$(126)\quad m = \sigma - \frac{1}{6}\eta\sigma^3 - \frac{1}{12}\theta\sigma^4\cos\varphi - \frac{1}{12}\theta'\sigma^4\sin\varphi$$
$$- \frac{1}{40}\lambda\sigma^5\cos^2\varphi - \frac{1}{20}\lambda'\sigma^5\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{40}\lambda''\sigma^5\sin^2\varphi + \frac{1}{120}\eta^2\sigma^5$$
$$- \frac{1}{180}\mu\sigma^6\cos^3\varphi - \frac{1}{60}\mu'\sigma^6\sin\varphi\cos^2\varphi - \frac{1}{60}\mu''\sigma^6\sin^2\varphi\cos\varphi$$
$$- \frac{1}{180}\mu'''\sigma^6\sin^3\varphi$$
$$+ \frac{1}{120}\eta\theta\sigma^6\cos\varphi + \frac{1}{120}\eta\theta'\sigma^6\sin\varphi$$

wodurch auch m in Function von σ und φ dargestellt ist. Es verdient bemerkt zu werden, dass die vorhergehende Analyse leicht zu erkennen giebt, dass für die Ebene alle Coefficienten η, θ, θ', λ, etc. etc. Null werden, und dass man für die Kugel, deren Halbmesser R ist, $\eta = \frac{1}{R^2}$ erhält, während alle übrigen Coefficienten wieder Null werden. Für die Ebene wird also $m = \sigma$, welches auch aus anderen Gründen hervorgeht, und für die Kugel bekommt man

$$m = \sigma - \frac{1}{6R^2}\sigma^3 + \frac{1}{120R^4}\sigma^5 - \frac{1}{120.6.7R^6}\sigma^7 \pm \ldots\ ^{*)}$$

das ist,

---

*) Dieses Glied und alle übrigen ähnlichen Glieder kann man vollständig aus den obigen Angaben erhalten.

$$m = R \sin \frac{\sigma}{R}$$

und es ist hier σ ein Bogen irgend eines grössten Kreises auf dieser Kugel.

115.

Wir kommen jetzt zur Integration der Gleichungen (114), die auch durch die Methode der unbestimmten Coefficienten ausgeführt werden soll. Um im Voraus auf die Form der Unbekannten schliessen zu können, und die Bedeutung der willkührlichen Constanten kennen zu lernen soll die Integration zuerst mit bloser Berücksichtigung des ersten Gliedes von m ausgeführt werden. In diesem Falle, welchem die Bedeutung unterliegt, dass die Oberfläche eine Ebene ist, können die (114) direkt integrirt werden, und es lässt sich vom Integral im Voraus angeben, dass h eine grade Linie werden muss. Die Linien σ sind, da sie auch kürzeste Linien sind, in diesem Falle auch grade Linien. Setzt man $m = \sigma$, so werden die (114)

$$d\sigma = dh \cos\psi$$
$$\sigma d\varphi = dh \sin\psi$$
$$d\varphi = -d\psi$$

und das Integral der dritten Gleichung wird

$$\varphi + \psi = c$$

wenn c die willkührliche Constante bezeichnet. Eliminirt man $d\varphi$ durch die dritte Gleichung aus der zweiten, so sind noch zu integriren

$$d\sigma = dh \cos\psi$$
$$-\sigma d\psi = dh \sin\psi$$

Formt man diese auf bekannte Weise in die folgenden um,

$$0 = d\sigma \sin\psi + \sigma d\psi \cos\psi$$
$$dh = d\sigma \cos\psi - \sigma d\psi \sin\psi$$

so erkennt man sogleich dass

$$l = \sigma \sin\psi$$
$$h = \sigma \cos\psi + l'$$

die Integrale derselben sind, in welchen l und l' die willkührlichen Constanten bezeichnen. Die drei Integrale, die wir erhalten haben, gehören einem gradlinigten Dreieck an, denn setzt man

$$c = 180^0 - c', \quad l = k \sin c', \quad l' = k \cos c'$$

so werden sie

$$\varphi + \psi + c' = 180^0$$
$$k \sin c' = \sigma \sin \psi$$
$$h = \sigma \cos \psi + k \cos c'$$

In diesem Dreieck sind also die Seiten σ, k, h und c', ψ, φ sind bez. die diesen gegenüber liegenden Winkel. Man erkennt leicht, dass k der Werth von σ für ein verschwindendes φ ist, während zugleich $h = 0$ wird; lässt man die kürzeste Linie h hier anfangen, so ist c' oder c der Winkel, den die gesuchte Linie h an ihrem Anfangspunkt mit derjenigen Linie σ macht, die diesem Anfangspunkt entspricht, das ist der Winkel zwischen h und k, und zwar ist in unserem Dreieck c der äussere, und c' der innere Winkel. ψ ist für jeden beliebigen Werth von φ der Winkel den h mit σ macht, und es stellt sich also c als einen speciellen Werth von ψ dar. Nimmt man an, dass die kürzeste Linie h die k rechtwinklich schneidet, so wird $c = c' = 90^0$, die Formeln werden einfacher und gehen in die folgenden über,

$$k = \sigma \sin \psi = \sigma \cos \varphi$$
$$h = \sigma \cos \psi = \sigma \sin \varphi$$
$$\psi + \varphi = 90^0$$

man wird diese Bedingungen in der allgemeinen Integration der Gleichungen (114) wieder erkennen müssen.

116.

Gehen wir nun zur vollständigen Integration unserer Gleichungen über, so können wir k und h in Function von σ und φ ausdrücken, wir können aber auch umgekehrt diese in Function jener darstellen, und da diese Darstellung weiterhin erforderlich wird, so ist es am Dienlichsten sie sogleich vorzunehmen. Es könnte ohne Weiteres ein schiefwinkliches sphäroidisches Dreieck in Betracht gezogen werden, aber um den Entwickelungen die einfachste Form zu geben, soll zuerst ein rechtwinkliches sphäroidisches Dreieck betrachtet, und daher $c = 90^0$, $l = 0$ angenommen werden, der Werth der dritten im vorigen Artikel erhaltenen Constante wird sich nach den Entwickelungen ergeben. Es wird später auf einfache Weise vom rechtwinklichen zum allgemeinen schiefwinklichen sphäroidischen Dreieck übergegangen werden können. Der

eben eingeführten Bestimmung zufolge schneiden sich die kürzesten Linien h, und diejenige σ, welche dem Werthe $\varphi=0$ entspricht, unter einem rechten Winkel, und bilden die Catheten des nun in Betracht stehenden sphäroidischen Dreiecks, die Hypotenuse desselben ist der Werth von σ, welcher irgend einem unbestimmten Werthe von φ zukommt. Die Ausdehnung, die im Vorhergehenden der Entwickelung von m gegeben worden ist, erlaubt die vier Functionen $\sigma\sin\varphi$, $\sigma\cos\varphi$, $\sigma\sin\psi$, $\sigma\cos\psi$ bis auf Grössen siebenter Ordnung zu erhalten, die Function $\varphi+\psi$ hingegen kann nur bis auf Grössen sechster Ordnung erhalten werden, welches aber für die weiteren Combinationen ausreicht.

Es ist identisch

$$d.\sigma\sin\psi = d\sigma\sin\psi + \sigma d\psi\cos\psi$$
$$d.\sigma\cos\psi = d\sigma\cos\psi - \sigma d\psi\sin\psi$$

die durch Anwendung der dritten der (114) in die folgenden übergehen

$$d.\sigma\sin\psi = d\sigma\sin\psi - \sigma\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)d\varphi\cos\psi$$
$$d.\sigma\cos\psi = d\sigma\cos\psi + \sigma\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)d\varphi\sin\psi$$

aber die beiden ersten der (114) geben

$$0 = d\sigma\sin\psi - md\varphi\cos\psi$$
$$dh = d\sigma\cos\psi + md\varphi\sin\psi$$

es wird daher

$$\frac{d.\sigma\sin\psi}{dh} = \left(m-\sigma\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\right)\frac{d\varphi}{dh}\cos\psi$$
$$\frac{d.\sigma\cos\psi}{dh} = 1 - \left(m-\sigma\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\right)\frac{d\varphi}{dh}\sin\psi$$

und die dritte (114) giebt

$$\frac{d\varphi+d\psi}{dh} = \left(1-\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\right)\frac{d\varphi}{dh}$$

Diese drei Gleichungen sollen jetzt in den eben angegebenen Voraussetzungen, und durch Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten integrirt werden.

117.

Aus der vorläufigen Integration ist leicht zu erkennen, dass die folgenden Formen aufgestellt werden können,

$$\sigma \sin \varphi = (1+a)h + b h^2 + c h^3 + e h^4$$
$$\sigma \cos \varphi = a' + b'h^2 + c'h^3 + e'h^4 + f'h^5$$
$$\varphi + \psi = 90^0 + ih + lh^2 + mh^3 + nh^4$$

und dass die Coefficienten a, b, c, e von der zweiten, alle übrigen aber von der ersten Ordnung in Bezug auf die andere Cathete unsers Dreiecks sein müssen. Sei

$$z = ih + lh^2 + mh^3 + nh^4$$

dann wird $\psi = 90^0 - (\varphi - z)$, und

$$\sin \psi = \cos \varphi + z \sin \varphi - \tfrac{1}{2} z^2 \cos \varphi + \ldots$$
$$\cos \psi = \sin \varphi - z \cos \varphi - \tfrac{1}{2} z^2 \sin \varphi + \ldots$$

Die Substitution der obigen Ausdrücke in diese giebt bis auf Grössen siebenter Ordnung

$$\sigma \sin \psi = a' + \left(b' + i + ai - \tfrac{1}{2} a'i^2\right) h^2 + (c' + l + al + bi - a'il) h^3$$
$$+ (e' + m) h^4 + (f' + n) h^5$$
$$\sigma \cos \psi = (1 + a - a'i) h + (b - a'l) h^2 + \left(c - a'm - b'i - \tfrac{1}{2} i^2\right) h^3$$
$$+ (e - a'n - b'l - c'i - il) h^4$$

wodurch der Zusammenhang zwischen φ und ψ gegeben ist. Entweder aus der Summe der Quadrate der Ausdrücke für $\sigma \sin \psi$ und $\sigma \cos \psi$, oder auf dieselbe Weise aus den für $\sigma \sin \varphi$ und $\sigma \cos \varphi$ ergiebt sich bis auf Grössen achter Ordnung,

$$\sigma^2 = a'^2 + (1 + 2a + a^2 + 2a'b') h^2 + 2(b + ab + a'c') h^3$$
$$+ (2c + b'^2 + 2a'e') h^4 + 2(e + a'f' + b'c') h^5$$

Da ferner identisch

$$\sigma^2 d\varphi = \sigma \cos \varphi d.\sigma \sin \varphi - \sigma \sin \varphi d.\sigma \cos \varphi$$

ist, so geben die obigen Reihen

$$(127) \qquad \sigma^2 \frac{d\varphi}{dh} = a' + a'a + 2a'bh - (b' + ab' - 3a'c) h^2$$
$$- (2c' + 2ac' - 4a'e) h^3 - 3e'h^4 - 4f'h^5$$

und hieraus bekommt man

$$\sigma^3 \frac{d\varphi}{dh} \cos \psi = (a' + 2a'a - a'^2 i) h + (3a'b - a'^2 l) h^2 - b'h^3 - 2c'h^4$$
$$\sigma^3 \frac{d\varphi}{dh} \sin \psi = (a'^2 + a'^2 a) + 2a'^2 bh + a'ih^2 + (a'l - a'c') h^3$$

Die Gleichung (126) giebt

$$m-\sigma\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) = \sigma^3\Big\{\tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{4}\theta\sigma\cos\varphi + \tfrac{1}{4}\theta'\sigma\sin\varphi$$
$$+\tfrac{1}{10}\lambda\sigma^2\cos^2\varphi + \tfrac{1}{5}\lambda'\sigma^2\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{10}\lambda''\sigma^2\sin^2\varphi - \tfrac{1}{30}\eta^2\sigma^2$$
$$+\tfrac{1}{36}\mu\sigma^3\cos^3\varphi + \tfrac{1}{12}\mu'\sigma^3\sin\varphi\cos^2\varphi + \tfrac{1}{12}\mu''\sigma^3\sin^2\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{36}\mu'''\sigma^3\sin^3\varphi$$
$$-\tfrac{1}{24}\eta\theta\sigma^3\cos\varphi - \tfrac{1}{24}\eta\theta'\sigma^3\sin\varphi\Big\}$$

$$1-\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) = \sigma^2\Big\{\tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{1}{3}\theta\sigma\cos\varphi + \tfrac{1}{3}\theta'\sigma\sin\varphi$$
$$+\tfrac{1}{8}\lambda\sigma^2\cos^2\varphi + \tfrac{1}{4}\lambda'\sigma^2\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{8}\lambda''\sigma^2\sin^2\varphi - \tfrac{1}{24}\eta^2\sigma^2$$
$$+\tfrac{1}{30}\mu\sigma^3\cos^3\varphi + \tfrac{1}{10}\mu'\sigma^3\sin\varphi\cos^2\varphi + \tfrac{1}{10}\mu''\sigma^3\sin^2\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{30}\mu'''\sigma^3\sin^3\varphi$$
$$-\tfrac{1}{20}\eta\theta\sigma^3\cos\varphi - \tfrac{1}{20}\eta\theta'\sigma^3\sin\varphi\Big\}$$

und macht man diese vermittelst der vorhergehenden Ausdrücke zu Functionen von h, so werden sie

$$m-\sigma\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) = \sigma^3\Big\{\left(\tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{4}\theta a' + \tfrac{1}{10}\lambda a'^2 - \tfrac{1}{30}\eta^2 a'^2 + \tfrac{1}{36}\mu a'^3 - \tfrac{1}{24}\eta\theta a'^3\right)$$
$$+\left(\tfrac{1}{4}\theta'(1+a) + \tfrac{1}{5}\lambda' a' + \tfrac{1}{12}\mu' a'^2 - \tfrac{1}{24}\eta\theta' a'^2\right)h$$
$$+\left(\tfrac{1}{4}\theta b' + \tfrac{1}{10}\lambda'' - \tfrac{1}{30}\eta^2 + \tfrac{1}{12}\mu'' a' - \tfrac{1}{24}\eta\theta a'\right)h^2$$
$$+\left(\tfrac{1}{36}\mu''' - \tfrac{1}{24}\eta\theta'\right)h^3\Big\}$$

$$1-\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) = \sigma^2\Big\{\left(\tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{1}{3}\theta a' + \tfrac{1}{8}\lambda a'^2 - \tfrac{1}{24}\eta^2 a'^2 + \tfrac{1}{30}\mu a'^3 - \tfrac{1}{20}\eta\theta a'^3\right)$$
$$+\left(\tfrac{1}{3}\theta'(1+a) + \tfrac{1}{4}\lambda' a' + \tfrac{1}{10}\mu' a'^2 - \tfrac{1}{20}\eta\theta' a'^2\right)h$$
$$+\left(\tfrac{1}{3}\theta b' + \tfrac{1}{8}\lambda'' - \tfrac{1}{24}\eta^2 + \tfrac{1}{10}\mu'' a' + \tfrac{1}{20}\eta\theta a'\right)h^2$$
$$+\left(\tfrac{1}{30}\mu''' - \tfrac{1}{20}\eta\theta'\right)h^3\Big\}$$

Durch die Substitution der nun entwickelten Ausdrücke in die Differentialgleichungen des vor. Art. ergaben sich die folgenden Bedingungsgleichungen

$$a - a'i = -\tfrac{1}{3}\eta(a'^2 + a'^2 a) - \tfrac{1}{4}\theta(a'^3 + a'^3 a) - \tfrac{1}{10}\lambda a'^4$$
$$+\tfrac{1}{30}\eta^2 a'^4 - \tfrac{1}{36}\mu a'^5 + \tfrac{1}{24}\eta\theta a'^5$$

$$2b - 2a'l = -\tfrac{2}{3}\eta a'^2 b - \tfrac{1}{4}\theta'(a'^2 + 2a'^2 a) - \tfrac{1}{5}\lambda' a'^3 - \tfrac{1}{12}\mu' a'^4 + \tfrac{1}{24}\eta\theta' a'^4$$

$$3c - 3a'm - 3b'i - \tfrac{3}{2}i^2 = -\tfrac{1}{3}\eta a'i - \tfrac{1}{4}\theta(a'^2 b' + a'^2 i) - \tfrac{1}{10}\lambda'' a'^2$$
$$+\tfrac{1}{30}\eta^2 a'^2 - \tfrac{1}{12}\mu'' a'^3 + \tfrac{1}{24}\eta\theta a'^3$$

$$4e - 4a'n - 4b'l - 4c'i - 4il = -\tfrac{1}{3}\eta(a'l - a'c') - \tfrac{1}{4}\theta' a'i - \tfrac{1}{36}\mu''' a'^2 + \tfrac{1}{24}\eta\theta' a'^2$$

$$2b'+2i+2ai-a'i^2 = \frac{1}{3}\eta(a'+2a'a-a'^2i)+\frac{1}{4}\theta(a'^2+2a'^2a-a'^3i)$$
$$+\frac{1}{10}\lambda a'^3-\frac{1}{80}\eta^2a'^3+\frac{1}{36}\mu a'^4-\frac{1}{24}\eta\theta a'^4$$
$$3c'+3l+3al+3bi-3a'il = \frac{1}{3}\eta(3a'b-a'^2l)+\frac{1}{4}\theta'(a'+3a'a-a'^2i)$$
$$+\frac{1}{5}\lambda'a'^2+\frac{1}{12}\mu'a'^3-\frac{1}{24}\eta\theta'a'^3$$
$$4e'+4m = -\frac{1}{3}\eta b'+\frac{1}{10}\lambda''a'-\frac{1}{30}\eta^2a'+\frac{1}{12}\mu''a'^3-\frac{1}{24}\eta\theta a'^2$$
$$5f'+5n = -\frac{2}{3}\eta c'-\frac{1}{4}\theta' b'+\frac{1}{36}\mu'''a'-\frac{1}{24}\eta\theta' a'$$

$$i = \frac{1}{2}\eta(a'+a'a)+\frac{1}{3}\theta(a'^2+a'^2a)+\frac{1}{8}\lambda a'^3-\frac{1}{24}\eta^2a'^3+\frac{1}{30}\mu a'^4-\frac{1}{20}\eta\theta a'^4$$
$$2l = \eta a'b+\frac{1}{3}\theta'(a'+2a'a)+\frac{1}{4}\lambda'a'^2+\frac{1}{10}\mu'a'^3-\frac{1}{20}\eta\theta'a'^3$$
$$3m = -\frac{1}{2}\eta b'+\frac{1}{8}\lambda''a'-\frac{1}{24}\eta^2a'+\frac{1}{10}\mu'a'^2-\frac{1}{20}\eta\theta a'^2$$
$$4n = -\eta c'-\frac{1}{3}\theta'b'+\frac{1}{30}\mu'''a'-\frac{1}{20}\eta\theta'a'$$

und aus diesen Gleichungen findet man leicht

$$a = \frac{1}{6}\eta a'^2+\frac{1}{12}\theta a'^3+\frac{1}{40}\lambda a'^4+\frac{7}{360}\eta^2a'^4+\frac{1}{180}\mu a'^5+\frac{7}{360}\eta\theta a'^5$$
$$b = \frac{1}{24}\theta'a'^2+\frac{1}{40}\lambda'a'^3+\frac{1}{120}\mu'a'^4+\frac{1}{60}\eta\theta'a'^4$$
$$c = \frac{1}{120}\lambda''a'^2-\frac{2}{45}\eta^2a'^2+\frac{1}{180}\mu''a'^3-\frac{73}{1080}\eta\theta a'^3$$
$$e = \frac{1}{720}\mu'''a'^2-\frac{7}{360}\eta\theta'a'^2$$

$$b' = -\frac{1}{3}\eta a'-\frac{5}{24}\theta a'^2-\frac{3}{40}\lambda a'^3-\frac{2}{45}\eta^2a'^3-\frac{7}{360}\mu a'^4-\frac{17}{360}\eta\theta a'^4$$
$$c' = -\frac{1}{12}\theta'a'-\frac{7}{120}\lambda'a'^2-\frac{1}{45}\mu'a'^3-\frac{19}{540}\eta\theta'a'^3$$
$$e' = -\frac{1}{60}\lambda''a'-\frac{1}{45}\eta^2a'-\frac{1}{80}\mu''a'^2-\frac{1}{90}\eta\theta a'^2$$
$$f' = -\frac{1}{360}\mu'''a'-\frac{1}{60}\eta\theta'a'$$

$$i = \frac{1}{2}\eta a'+\frac{1}{3}\theta a'^2+\frac{1}{8}\lambda a'^3+\frac{1}{24}\eta^2a'^3+\frac{1}{30}\mu a'^4+\frac{17}{360}\eta\theta a'^4$$
$$l = \frac{1}{6}\theta'a'+\frac{1}{8}\lambda'a'^2+\frac{1}{20}\mu'a'^3+\frac{37}{720}\eta\theta'a'^3$$
$$m = \frac{1}{24}\lambda''a'+\frac{1}{24}\eta^2a'+\frac{1}{30}\mu''a'^2+\frac{13}{720}\eta\theta a'^2$$
$$n = \frac{1}{120}\mu'''a'+\frac{13}{360}\eta\theta'a'$$

Der Coefficient a' bleibt unbestimmt, und bildet die zum Integral der zweiten Differentialgleichung hinzuzufügende Constante. Nehmen wir

die oben eingeführte Bestimmung wieder auf, zufolge welcher der Werth von σ, welcher der Bedingung $\varphi = 0$, woraus $h = 0$ folgt, entspricht mit k bezeichnet werden soll, so bekommt man $a' = k$. Hiemit ist die Integration unserer Differentialgleichungen vollständig ausgeführt.

118.

Die Substitution der eben erhaltenen Werthe der Coefficienten a, b, etc. in die Ausdrücke für $\sigma \sin \varphi$, etc. giebt

$$
\begin{aligned}
\sigma \sin\varphi = h &+ \tfrac{1}{6}\eta k^2 h + \tfrac{1}{12}\theta k^3 h + \left(\tfrac{1}{40}\lambda + \tfrac{7}{360}\eta^2\right)k^4 h + \left(\tfrac{1}{180}\mu + \tfrac{7}{360}\eta\theta\right)k^5 h \\
&+ \tfrac{1}{24}\theta' k^2 h^2 \qquad + \tfrac{1}{40}\lambda' k^3 h^2 + \left(\tfrac{1}{120}\mu' + \tfrac{1}{60}\eta\theta'\right)k^4 h^2 \\
&+ \left(\tfrac{1}{120}\lambda'' - \tfrac{2}{45}\eta^2\right)k^2 h^3 + \left(\tfrac{1}{180}\mu'' - \tfrac{73}{1080}\eta\theta\right)k^3 h^3 \\
&+ \left(\tfrac{1}{720}\mu''' - \tfrac{7}{360}\eta\theta'\right)k^2 h^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma \cos\varphi = k &- \tfrac{1}{3}\eta k h^2 - \tfrac{5}{24}\theta k^2 h^2 - \left(\tfrac{3}{40}\lambda + \tfrac{2}{45}\eta^2\right)k^3 h^2 - \left(\tfrac{7}{360}\mu + \tfrac{17}{360}\eta\theta\right)k^4 h^2 \\
&- \tfrac{1}{12}\theta' k h^3 \qquad - \tfrac{7}{120}\lambda' k^2 h^3 - \left(\tfrac{1}{45}\mu' + \tfrac{19}{540}\eta\theta'\right)k^3 h^3 \\
&- \left(\tfrac{1}{60}\lambda'' + \tfrac{1}{45}\eta^2\right)k h^4 - \left(\tfrac{1}{80}\mu'' + \tfrac{1}{90}\eta\theta\right)k^2 h^4 \\
&- \left(\tfrac{1}{360}\mu''' + \tfrac{1}{60}\eta\theta'\right)k\, h^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma \sin\psi = k &+ \tfrac{1}{6}\eta k h^2 + \tfrac{1}{8}\theta k^2 h^2 + \left(\tfrac{1}{20}\lambda - \tfrac{2}{45}\eta^2\right)k^3 h^2 + \left(\tfrac{1}{72}\mu - \tfrac{5}{72}\eta\theta\right)k^4 h^2 \\
&+ \tfrac{1}{12}\theta' k h^3 \qquad + \tfrac{1}{15}\lambda' k^2 h^3 + \left(\tfrac{1}{36}\mu' - \tfrac{1}{54}\eta\theta'\right)k^3 h^3 \\
&+ \left(\tfrac{1}{40}\lambda'' + \tfrac{7}{360}\eta^2\right)k h^4 + \left(\tfrac{1}{48}\mu'' + \tfrac{1}{144}\eta\theta\right)k^2 h^4 \\
&+ \left(\tfrac{1}{180}\mu''' + \tfrac{7}{360}\eta\theta'\right)k\, h^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma \cos\psi = h &- \tfrac{1}{3}\eta k^2 h - \tfrac{1}{4}\theta k^3 h - \left(\tfrac{1}{10}\lambda + \tfrac{1}{45}\eta^2\right)k^4 h - \left(\tfrac{1}{36}\mu + \tfrac{1}{36}\eta\theta\right)k^5 h \\
&- \tfrac{1}{8}\theta' k^2 h^2 \qquad - \tfrac{1}{10}\lambda' k^3 h^2 - \left(\tfrac{1}{24}\mu' + \tfrac{5}{144}\eta\theta'\right)k^4 h^2 \\
&- \left(\tfrac{1}{30}\lambda'' + \tfrac{2}{45}\eta^2\right)k^2 h^3 - \left(\tfrac{1}{36}\mu'' + \tfrac{1}{27}\eta\theta\right)k^3 h^3 \\
&- \left(\tfrac{1}{144}\mu''' + \tfrac{1}{24}\eta\theta'\right\}k^2 h^4
\end{aligned}
$$

$$\sigma^2 = k^2 + h^2 - \frac{1}{8}\eta k^2h^2 - \frac{1}{4}\theta k^3h^2 - \left(\frac{1}{10}\lambda + \frac{1}{45}\eta^2\right)k^4h^2 - \left(\frac{1}{36}\mu + \frac{1}{36}\eta\theta\right)k^5h^2$$
$$- \frac{1}{12}\theta' k^2h^3 \qquad - \frac{1}{15}\lambda' k^3h^3 - \left(\frac{1}{36}\mu' + \frac{5}{216}\eta\theta'\right)k^4h^3$$
$$-\left(\frac{1}{60}\lambda'' + \frac{1}{45}\eta^2\right)k^2h^4 - \left(\frac{1}{72}\mu'' + \frac{1}{54}\eta\theta\right)k^3h^4$$
$$-\left(\frac{1}{360}\mu''' + \frac{1}{60}\eta\theta'\right)k^2h^5$$

$$\varphi + \psi = 90^0 + \frac{1}{2}\eta kh + \frac{1}{3}\theta k^2h + \left(\frac{1}{8}\lambda + \frac{1}{24}\eta^2\right)k^3h + \left(\frac{1}{30}\mu + \frac{17}{360}\eta\theta\right)k^4h$$
$$+ \frac{1}{6}\theta' kh^2 \qquad + \frac{1}{8}\lambda' k^2h^2 + \left(\frac{1}{20}\mu' + \frac{37}{720}\eta\theta'\right)k^3h^2$$
$$+\left(\frac{1}{24}\lambda'' + \frac{1}{24}\eta^2\right)kh^3 + \left(\frac{1}{30}\mu'' + \frac{13}{720}\eta\theta\right)k^2h^3$$
$$+\left(\frac{1}{120}\mu''' + \frac{13}{360}\eta\theta'\right)k\,h^4$$

Ich bemerke hiezu, dass σ, k, h hier dasselbe bedeuten, was bez. r, p, q bei Gauss.

119.

Die Fläche unseres sphäroidischen Dreiecks lässt sich leicht durch k und h ausdrücken, und die Ausdehnung, die den vorhergehenden Entwickelungen gegeben worden ist, erlaubt sie bis auf Grössen achter Ordnung zu erhalten; die Glieder der siebenten Ordnung sollen jedoch hier übergangen werden, da sie in den Anwendungen, die weiter unten vorkommen werden, wegfallen.

Da die Linearelemente der rechten Seite der Differentialgleichung (113), nemlich $d\sigma$ und $md\varphi$, einander immer unter einem rechten Winkel schneiden, so ist das Flächenelement auf unserer Oberfläche durch den Ausdruck $md\varphi d\sigma$ gegeben, und wenden wir diesen auf unser rechtwinkliches sphäroidisches Dreieck an, dessen Fläche mit F bezeichnet werden soll, so wird

$$F = \int d\varphi \int m d\sigma$$

Multiplicirt man den Ausdruck (126) für m mit $d\sigma$ und integrirt in Bezug auf σ allein, so bekommt man mit Weglassung der Glieder siebenter Ordnung

$$\int m d\sigma = \sigma^2\Big\{\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\eta\sigma^2 - \frac{1}{60}\theta\sigma^3\cos\varphi - \frac{1}{60}\theta'\sigma^3\sin\varphi$$
$$- \frac{1}{240}\lambda\sigma^4\cos^2\varphi - \frac{1}{120}\lambda'\sigma^4\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{240}\lambda''\sigma^4\sin^2\varphi + \frac{1}{720}\eta^2\sigma^4\Big\}$$

wo die Integrationsconstante Null ist, da das Integral für $\sigma = 0$ verschwinden muss. Das Produkt dieses Integrals mit $d\varphi$ drückt die unendlich kleine Fläche aus, die zwischen den, irgend welchen Werthen von φ und $\varphi + d\varphi$ zukommenden, Linien σ enthalten ist, und das Integral dieses Produkts giebt die endliche Fläche des Dreiecks. Da bei dieser zweiten Integration beides σ und φ als veränderlich zu betrachten sind, so müsste σ durch φ ausgedrückt werden, einfacher ist es jedoch beide Veränderliche vermittelst der Reihen des vor. Art. durch h auszudrücken. Man bekommt dadurch

$$\begin{aligned}\int m\,d\sigma = \sigma^2 \Big\{ & \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24}\eta k^2 - \tfrac{1}{60}\theta k^3 - \left(\tfrac{1}{240}\lambda - \tfrac{1}{720}\eta^2\right)k^4 \\ & - \tfrac{1}{24}\eta h^2 - \tfrac{1}{60}\theta' k^2 h - \tfrac{1}{120}\lambda' k^3 h \\ & - \tfrac{1}{60}\theta k h^2 - \left(\tfrac{1}{240}\lambda + \tfrac{1}{240}\lambda'' - \tfrac{1}{60}\eta^2\right)k^2 h^2 \\ & - \tfrac{1}{60}\theta' h^3 - \tfrac{1}{120}\lambda' k h^3 \\ & - \left(\tfrac{1}{240}\lambda'' - \tfrac{1}{720}\eta^2\right)h^4 \Big\}\end{aligned}$$

Die Gleichung (127) giebt ausserdem

$$\begin{aligned}\sigma^2 d\varphi = dh \Big\{ & k + \tfrac{1}{6}\eta k^3 + \tfrac{1}{12}\theta k^4 + \left(\tfrac{1}{40}\lambda + \tfrac{7}{360}\eta^2\right)k^5 \\ & + \tfrac{1}{8}\eta k h^2 + \tfrac{1}{12}\theta' k^3 h + \tfrac{1}{20}\lambda' k^4 h \\ & + \tfrac{5}{24}\theta k^2 h^2 + \left(\tfrac{3}{40}\lambda + \tfrac{1}{40}\lambda'' - \tfrac{1}{30}\eta^2\right)k^3 h^2 \\ & + \tfrac{1}{6}\theta' k h^3 + \tfrac{7}{60}\lambda' k^2 h^3 \\ & + \left(\tfrac{1}{20}\lambda'' + \tfrac{1}{15}\eta^2\right)k\,h^4 \Big\}\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese beiden Ausdrücke mit einander, und integrirt wieder, so entsteht

$$\begin{aligned}F = & \tfrac{1}{2}kh + \tfrac{1}{24}\eta k^3 h + \tfrac{1}{40}\theta k^4 h + \left(\tfrac{1}{120}\lambda + \tfrac{1}{240}\eta^2\right)k^5 h \\ & + \tfrac{1}{24}\eta k h^3 + \tfrac{1}{80}\theta' k^3 h^2 + \tfrac{1}{120}\lambda' k^4 h^2 \\ & + \tfrac{7}{240}\theta k^2 h^3 + \left(\tfrac{1}{90}\lambda + \tfrac{1}{360}\lambda'' - \tfrac{1}{144}\eta^2\right)k^3 h^3 \\ & + \tfrac{1}{60}\theta' k h^4 + \tfrac{1}{80}\lambda' k^2 h^4 \\ & + \left(\tfrac{1}{240}\lambda'' + \tfrac{1}{240}\eta^2\right)k\,h^5\end{aligned}$$

wo wieder die Integrationsconstante Null ist, da die Fläche F für $h = 0$ verschwinden muss.

120.

Ausser dem bisher betrachteten rechtwinklichen sphäroidischen Dreieck, dessen Seiten und gegenüber liegenden Winkel

$$\begin{matrix} \sigma, & k, & h \\ 90^0, & \psi, & \varphi \end{matrix}$$

sind, soll jetzt ein zweites betrachtet werden, dessen Stücke die folgenden sind,

$$\begin{matrix} \sigma', & k, & h' \\ 90^0, & \psi', & \varphi' \end{matrix}$$

welches also aus dem vorhergehenden durch blose Vertauschung von σ mit σ', h mit h', ψ mit ψ', φ mit φ' entsteht. Die Fläche dieses Dreiecks soll mit F' bezeichnet werden. Es versteht sich nun von selbst, dass alle im Vorhergehenden für jenes Dreieck abgeleiteten Relationen auch auf dieses angewandt werden können, wenn man in denselben die angeführten Vertauschungen einführt. Durch den Unterschied dieser beiden rechtwinklichen Dreiecke wird ein allgemeines sphäroidisches Dreieck gebildet, dessen Seiten und gegenüber liegenden Winkel

$$\begin{matrix} \sigma, & \sigma', & h-h' \\ 180-\psi', & \psi, & \varphi-\varphi' \end{matrix}$$

sind. Um hiefür einfache Bezeichnungen einzuführen sollen im Folgenden dessen Seiten mit a, b, c, und dessen Winkel mit A, B, C bezeichnet werden, und zwar so dass

$$\begin{matrix} a = h - h', & b = \sigma', & c = \sigma \\ A = \varphi - \varphi', & B = \psi, & C = 180^0 - \psi' \end{matrix}$$

werden. Nennt man ferner die Fläche dieses allgemeinen sphäroidischen Dreiecks Δ, so hat diese

$$\Delta = F - F'$$

zum Ausdruck.

121.

Der Ausdruck für Δ ergiebt sich nun zuerst aus dem Ausdruck des vorvor. Art. für F wie folgt,

$$\Delta = \tfrac{1}{2}k(h-h')\Big\{1+\tfrac{1}{12}\eta(k^2+h^2+hh'+h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\theta k(6k^2+7h^2+7hh'+7h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\theta'(3k^2(h+h')+4h^3+4h^2h'+4hh'^2+4h'^3)$$
$$+\tfrac{1}{180}\lambda k^2(3k^2+4h^2+4hh'+4h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\lambda' k(2k^2(h+h')+3h^3+3h^2h'+3hh'^2+3h'^3)$$
$$+\tfrac{1}{360}\lambda''(2k^2(h^2+hh'+h'^2)+3h^4+3h^3h'+3h^2h'^2+3hh'^3+3h'^4)$$
$$+\tfrac{1}{360}\eta^2(3k^4-5k^2(h^2+hh'+h'^2)+3h^4+3h^3h'+3h^2h'^2+3hh'^3+3h'^4)\Big\}$$

Aus der Reihe für $\sigma\sin\psi$ des Art. 118 und der Gleichung $a=h-h'$ bekommt man aber

$$k(h-h') = ac\sin B\Big\{1-\tfrac{1}{6}\eta h^2-\tfrac{1}{8}\theta kh^2-\tfrac{1}{12}\theta' h^3$$
$$-\tfrac{1}{20}\lambda k^2h^2-\tfrac{1}{15}\lambda' kh^3-\tfrac{1}{40}\lambda'' h^4$$
$$-\tfrac{1}{360}\eta^2(16k^2h^2+3h^4)\Big\}$$

und macht man hiemit $ac\sin B$ zum allgemeinen Factor des vorstehenden Ausdrucks für Δ, so wird dieser

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ac\sin B\Big\{1-\tfrac{1}{12}\eta(k^2-h^2+hh'+h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\theta k(6k^2-8h^2+7hh'+7h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\theta'(3k^2(h+h')-6h^3+4h^2h'+4hh'^2+4h'^3)$$
$$+\tfrac{1}{180}\lambda k^2(3k^2-5h^2+4hh'+4h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\lambda' k(2k^2(h+h')-5h^3+3h^2h'+3hh'^2+3h'^3)$$
$$+\tfrac{1}{360}\lambda''(2k^2(h^2+hh'+h'^2)-6h^4+3h^3h'+3h^2h'^2+3hh'^3+3h'^4)$$
$$+\tfrac{1}{360}\eta^2(3k^4+k^2(6h^2-5hh'-5h'^2)+h^4-2h^3h'-2h^2h'^2+3hh'^3+3h'^4)\Big\}$$

Man kann diesen Ausdruck durch die Einführung der Krümmungsmaasse, die den Dreiecksecken A, B, C angehören, und die bez. mit α, β, γ bezeichnet werden sollen, vereinfachen. Die Substitution der betreffenden Reihen des Art. 118 in den Ausdruck (125) giebt das Krümmungsmaass allgemein in Function von k und h, und es ist leicht einzusehen, dass dieser Ausdruck zugleich der Ausdruck von β ist, schreibt man in demselben h' statt h, so erhält man den Ausdruck für γ, und der für α ergiebt sich, wenn man in (125) $\sigma=0$ macht. Auf diese Weise entstehen

$$\begin{aligned}
\alpha &= \eta \\
\beta &= \eta + \theta k + \theta' h + \tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \lambda' kh + \tfrac{1}{2}\lambda'' h^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{6}\mu k^3 + \tfrac{1}{2}\mu' k^2 h + \tfrac{1}{2}\mu'' k h^2 + \tfrac{1}{6}\mu''' h^3 - \tfrac{1}{3}\eta\theta k h^2 + \tfrac{1}{6}\eta\theta' k^2 h \\
\gamma &= \eta + \theta k + \theta' h' + \tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \lambda' kh' + \tfrac{1}{2}\lambda'' h'^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{6}\mu k^3 + \tfrac{1}{2}\mu' k^2 h' + \tfrac{1}{2}\mu'' k h'^2 + \tfrac{1}{6}\mu''' h'^3 - \tfrac{1}{3}\eta\theta k h'^2 + \tfrac{1}{6}\eta\theta' k^2 h'
\end{aligned}$$

Man kann diese drei Gleichungen anwenden um die Coefficienten η, θ, θ' aus dem Ausdruck für Δ zu eliminiren, und löst man sie zu dem Ende in Bezug auf diese Grössen auf, und schreibt sogleich alle Glieder, die man bekommen kann, hin, obgleich die höchster Ordnung erst weiter unten gebraucht werden, so geben sie

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned}
\eta &= \alpha \\
\theta k &= -\alpha - \beta\frac{h'}{h-h'} + \gamma\frac{h}{h-h'} - \tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \tfrac{1}{2}\lambda'' hh' \\
&\quad - \tfrac{1}{6}\mu k^3 + \tfrac{1}{2}\mu'' khh' + \tfrac{1}{6}\mu''' hh'(h+h') \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\alpha^2 hh' + \tfrac{1}{3}\alpha\beta\frac{hh'^2}{h-h'} - \tfrac{1}{3}\alpha\gamma\frac{h^2h'}{h-h'} \\
\theta' &= \beta\frac{1}{h-h'} - \gamma\frac{1}{h-h'} - \lambda' k - \tfrac{1}{2}\lambda''(h+h') \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\mu' k^2 - \tfrac{1}{2}\mu'' k(h+h') - \tfrac{1}{6}\mu'''(h^2+hh'+h'^2) \\
&\quad - \tfrac{1}{3}\alpha^2(h+h') - \tfrac{1}{6}\alpha\beta\frac{k^2+2hh'+2h'^2}{h-h'} + \tfrac{1}{6}\alpha\gamma\frac{k^2+2h^2+2hh'}{h-h'}
\end{aligned}\right.$$

Da im obigen Ausdruck von Δ die Glieder siebenter Ordnung übergangen sind, so müssen hier bei der Elimination von η, θ, θ' in den vorstehenden Ausdrücken dieser Grössen auch die entsprechenden Glieder, und zwar die mit μ, μ', etc. α^2, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ multiplicirten übergangen werden. Die Elimination giebt in Folge dieser Bemerkung

$$\begin{aligned}
\Delta = \tfrac{1}{2} ac \sin B \Big\{ 1 &+ \tfrac{\alpha}{120}(4k^2 - 2h^2 + 3hh' + 3h'^2) \\
&+ \tfrac{\beta}{120}(3k^2 - 6h^2 + 6hh' + 3h'^2) \\
&+ \tfrac{\gamma}{120}(3k^2 - 2h^2 + hh' + 4h'^2) \\
&- \tfrac{\lambda k^2}{720}(6k^2 - 4h^2 + 5hh' + 5h'^2) \\
&- \tfrac{\lambda' k}{120}(k^2(h+h') - h^3 + h^2h' + hh'^2 + h'^3) \\
&- \tfrac{\lambda''}{720}(k^2(5h^2 - 4hh' + 5h'^2) - 6h^4 + 12h^3h' - 3h^2h'^2 - 3hh'^3 + 6h'^4) \\
&+ \tfrac{\eta^2}{360}(3k^4 + k^2(6h^2 - 5hh' - 5h'^2) + h^4 - 2h^3h' - 2h^2h'^2 + 3hh'^3 + 3h'^4) \Big\}
\end{aligned}$$

Man kann noch einen Schritt weiter gehen, und k, h, h' durch die Dreiecksseiten a und c und den Winkel B ausdrücken. Zu diesem Zweck bekommt man leicht aus den Reihen für $\sigma \sin \psi$ und $\sigma \cos \psi$ des Art. 118

$$\left.\begin{aligned} k &= c \sin B \qquad - \tfrac{1}{6}\eta c^3 \sin B \cos^2 B \\ h &= c \cos B \qquad + \tfrac{1}{3}\eta c^3 \sin^2 B \cos B \\ h' &= c \cos B - a + \tfrac{1}{3}\eta c^3 \sin^2 B \cos B \end{aligned}\right\} \quad . \quad (129)$$

Bei der Substitution dieser Ausdrücke entstehen Glieder, die mit $\alpha\eta$, $\beta\eta$, $\gamma\eta$ multiplicirt sind, in welchen aber aus demselben Grunde wie oben

$$\alpha = \beta = \gamma = \eta$$

gesetzt werden muss. Denn da α, β, γ nur um Grössen erster Ordnung von einander verschieden sind, so würden durch die Nichtberücksichtigung dieser Gleichungen Glieder siebenter Ordnung mit in das Resultat der Elimination hinein gezogen werden, die nichts bedeuten können, weil die übrigen Glieder derselben Ordnung übergangen sind. Die Substitution der (129) giebt nun

$$\begin{aligned} \Delta = \tfrac{1}{2} ac \sin B \Big\{ 1 &+ \tfrac{\alpha}{120}(3a^2 - 9ac \cos B + 4c^2) \\ &+ \tfrac{\beta}{120}(3a^2 - 12ac \cos B + 3c^2) \\ &+ \tfrac{\gamma}{120}(4a^2 - 9ac \cos B + 3c^2) \\ &+ \tfrac{\eta^2}{360}(3a^4 - 5a^2c^2 + 3c^4 - 15ab^2c \cos B) + l \Big\} \end{aligned}$$

wenn die Summe der im vorhergehenden Ausdruck für Δ mit λ, λ', λ'' multiplicirten Glieder, die weiter unten nicht gebraucht werden, mit l bezeichnet wird. Alle vorstehenden Ausdrücke für Δ sind bis auf Grössen der siebenten Ordnung richtig, und ausser dem letzten würde man noch zwei andere erhalten können, deren einer vom Winkel A, und deren anderer vom Winkel C abhängen würde; ich halte indess für überflüssig diese beiden Ausdrücke hier abzuleiten, um so mehr, da wir sie weiter unten auf einfachere Art werden erhalten können.

122.

Die Summe der Winkel unsers allgemeinen sphäroidischen Dreiecks kann auf ähnliche Weise ausgedrückt werden. Die Reihe für $\varphi + \psi$ des

Art. 118 wird auch durch die Verwandelung von h in h' auf das zweite im vorvor. Art. betrachtete, rechtwinkliche sphäroidische Dreieck bezogen, und die linke Seite derselben geht zugleich in $\varphi'+\psi'$ über. Zieht man den Ausdruck dieser Grösse von dem der vorher erwähnten ab, so wird die rechte Seite des Unterschiedes der Ausdruck von

$$(\varphi-\varphi')+\psi-\psi' = 180^0+A+B+C$$

und wir bekommen daher sogleich für die Summe der Winkel des allgemeinen sphäroidischen Dreiecks den Ausdruck

$$\begin{aligned}A+B+C = 180^0 + k(h-h')\Big\{ & \tfrac{1}{2}\eta+\tfrac{1}{8}\theta k+\tfrac{1}{6}\theta'(h+h') \\ & +\tfrac{1}{8}\lambda k^2+\tfrac{1}{8}\lambda' k(h+h')+\tfrac{1}{24}\lambda''(h^2+hh'+h'^2) \\ & +\tfrac{1}{30}\mu k^3+\tfrac{1}{20}\mu' k^2(h+h')+\tfrac{1}{80}\mu'' k(h^2+hh'+h'^2) \\ & \qquad +\tfrac{1}{120}\mu'''(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3) \\ & +\tfrac{1}{24}\eta^2(k^2+h^2+hh'+h'^2) \\ & +\tfrac{1}{720}\eta\theta k(34k^2+13(h^2+hh'+h'^2)) \\ & +\tfrac{1}{720}\eta\theta'(37k^2(h+h')+26(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\Big\}\end{aligned}$$

Führt man hierin zuerst die Dreiecksfläche durch die Gleichung

$$(130)\quad \begin{aligned}k(h-h') = 2\Delta\Big\{ & 1-\tfrac{1}{12}\eta(k^2+h^2+hh'+h'^2) \\ & -\tfrac{1}{120}\theta k(6k^2+7(h^2+hh'+h'^2)) \\ & -\tfrac{1}{120}\theta'(3k^2(h+h')+4(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\Big\}\end{aligned}$$

ein, die leicht aus dem Vorhergehenden folgt, so wird

$$\begin{aligned}A+B+C = 180^0+\Delta\Big\{ & \eta+\tfrac{2}{3}\theta k+\tfrac{1}{3}\theta'(h+h') \\ & +\tfrac{1}{4}\lambda k^2+\tfrac{1}{4}\lambda' k(h+h')+\tfrac{1}{12}\lambda''(h^2+hh'+h'^2) \\ & +\tfrac{1}{15}\mu k^3+\tfrac{1}{10}\mu' k^2(h+h')+\tfrac{1}{15}\mu'' k(h^2+hh'+h'^2) \\ & \qquad +\tfrac{1}{60}\mu'''(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3) \\ & -\tfrac{1}{90}\eta\theta k(k^2+7(h^2+hh'+h'^2)) \\ & +\tfrac{1}{180}\eta\theta'(9k^2(h+h')+2h^3-3h^2h'-3hh'^2+2h'^3)\Big\}\end{aligned}$$

und eliminirt man hieraus η, θ, θ' durch die (128), deren Glieder hier Alle in Betracht kommen, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
A+B+C = 180^0 &+ \tfrac{\Delta}{3}(\alpha+\beta+\gamma) \\
&+ \tfrac{\Delta\alpha^2}{90}(k^2-3h^2+7hh'-3h'^2) \\
&- \tfrac{\Delta\alpha\beta}{180}(k^2-2h^2+7hh'-4h'^2) \\
&- \tfrac{\Delta\alpha\gamma}{180}(k^2-4h^2+7hh'-2h'^2) \\
&- \tfrac{\Delta}{12}\{\lambda k^2+\lambda' k(h+h')+\lambda''(h^2+hh'+h'^2)\} \\
&- \tfrac{\Delta}{180}\{8\mu k^3+12\mu' k^2(h+h')+6\mu'' k(3h^2-2hh'+3h'^2) \\
&\qquad\qquad + \mu'''(7h^3-3h^2h'-3hh'^2+7h'^3)\}
\end{aligned}
$$

Wendet man endlich die (129) an, um die Dreiecksstücke a, c, B einzuführen, wobei hier nur die Glieder erster Ordnung derselben in Betracht kommen, so bekommt man

$$
\begin{aligned}
A+B+C = 180^0 &+ \tfrac{\Delta}{3}(\alpha+\beta+\gamma) \\
&+ \tfrac{\Delta\alpha^2}{90}(c^2-ac\cos B-3a^2) \\
&- \tfrac{\Delta\alpha\beta}{180}(c^2+ac\cos B-4a^2) \\
&- \tfrac{\Delta\alpha\gamma}{180}(c^2-3\,ac\cos B-2a^2) \\
&- \tfrac{\Delta}{12}\{\varLambda c^2-\varLambda' ac+\varLambda'' a^2\} \\
&- \tfrac{\Delta}{180}\{8Mc^3-12M'ac^2+18M''a^2c-7M'''a^3\}
\end{aligned}
$$

wo zur Abkürzung

$$
\left.
\begin{aligned}
\varLambda &= \lambda\sin^2 B+2\lambda'\sin B\cos B+\lambda''\cos^2 B \\
\varLambda' &= \lambda'\sin B+\lambda''\cos B \\
\varLambda'' &= \lambda'' \\
M &= \mu\sin^3 B+3\mu'\sin^2 B\cos B+3\mu''\sin B\cos^2 B+\mu'''\cos^3 B \\
M' &= \mu'\sin^2 B+2\mu''\sin B\cos B+\mu'''\cos^2 B \\
M'' &= \mu''\sin B+\mu'''\cos B \\
M''' &= \mu'''
\end{aligned}
\right\} \quad (131)
$$

gesetzt worden ist. Die vorstehenden Ausdrücke für die Summe der Winkel des allgemeinen sphäroidischen Dreiecks sind bis auf Grössen sechster Ordnung richtig.

123.

Vergleichen wir jetzt das bisher betrachtete sphäroidische Dreieck mit dem sphärischen, welches dieselben Seiten a, b, c, hingegen die Winkel $A+\delta A$, $B+\delta B$, $C+\delta C$ hat, und entwickeln die Ausdrücke für δA, δB, δC. Ich habe hier das sphärische, statt des von Gauss zur Vergleichung gewählten ebenen Dreiecks gesetzt, weil das Resultat dadurch eine grössere Allgemeinheit erhält, und die Vergleichung mit dem ebenen Dreieck als speciellen Fall in sich fasst, welcher einfach dadurch herbei geführt wird, dass man den Halbmesser der Kugel, auf welcher man sich das sphärische Dreieck verzeichnet denkt, unendlich gross macht. Dieser Halbmesser, welcher hier mit in Betracht kommt, und mit r bezeichnet werden soll, ist im Allgemeinen völlig willkührlich, und man kann ihn in den Anwendungen so bestimmen, dass die Ausdrücke möglichst einfach werden. Nehmen wir nun r in demselben Linearmaasse ausgedrückt an, wie die Dreiecksseiten a, b, c, dann erhalten wir aus der sphärischen Trigonometrie

$$\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos(A+\delta A) = \cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}$$

und setzt man hierin für die Sinusse und Cosinusse der Seiten die bekannten Reihen, die schon oben angewandt wurden, so giebt eine Entwickelung, die durchaus keine Schwierigkeiten hat,

$$(132)\quad \begin{cases} bc\cos(A+\delta A) = -\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2+K \\ ac\cos(B+\delta B) = \frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2+L \\ ab\cos(C+\delta C) = \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2+M \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$K = \frac{a^2}{24r^2}(a^2-2b^2-2c^2)+\frac{1}{24r^2}(b^2-c^2)^2$$
$$-\frac{a^4}{720r^4}(a^2-5b^2-5c^2)-\frac{a^2}{720r^4}(7b^4+7c^4+10b^2c^2)+\frac{1}{240r^4}(b^2-c^2)^2(b^2+c^2)$$

$$L = \frac{a^2}{24r^2}(a^2-2b^2-2c^2)+\frac{1}{24r^2}(b^2-c^2)^2$$
$$+\frac{a^4}{720r^4}(3a^2-7b^2-3c^2)+\frac{a^2}{720r^4}(5b^4-3c^4-10b^2c^2)-\frac{1}{720r^4}(b^2-c^2)^2(b^2-3c^2)$$

$$M = \frac{a^2}{24r^2}(a^2-2b^2-2c^2)+\frac{1}{24r^2}(b^2-c^2)^2$$
$$+\frac{a^4}{720r^4}(3a^2-3b^2-7c^2)-\frac{a^2}{720r^4}(3b^4-5c^4+10b^2c^2)+\frac{1}{720r^4}(b^2-c^2)^2(3b^2-c^2)$$

gesetzt worden ist. Diese drei Ausdrücke folgen durch Vertauschung der betreffenden Buchstaben aus einander, die weiteren Entwickelungen aber besitzen diese Eigenschaft, wenn man nicht neue, von der allgemeinen Oberfläche abhängige, Hülfsgrössen einführen will, nur in geringerem Maasse.

Zur weiteren Entwickelung der Functionen K, L, M brauchen wir ausser der Gleichung $a=h-h'$ nur die ersten Glieder von σ^2 und σ'^2, hier c^2 und b^2, des Art. 118, nemlich

$$b^2 = k^2+h'^2-\tfrac{1}{8}\eta k^2h'^2-\tfrac{1}{4}\theta k^3h'^2-\tfrac{1}{12}\theta' k^2h'^3$$

$$c^2 = k^2+h^2-\tfrac{1}{8}\eta k^2h^2-\tfrac{1}{4}\theta k^3h^2-\tfrac{1}{12}\theta' k^2h^3$$

diese geben leicht

$$a^2-2b^2-2c^2 = -4k^2-(h+h')^2+\tfrac{2}{3}\eta k^2(h^2+h'^2)+\tfrac{1}{2}\theta k^3(h^2+h'^2) + \tfrac{1}{6}\theta' k^2(h^3+h'^3)$$

$$(b^2-c^2)^2 = (h-h')^2\Big\{(h+h')^2-\tfrac{2}{3}\eta k^2(h+h')^2-\tfrac{1}{2}\theta k^3(h+h')^2 - \tfrac{1}{6}\theta' k^2(h+h')(h^2+hh'+h'^2)\Big\}$$

und folglich wird

$$a^2(a^2-2b^2-2c^2)+(b^2-c^2)^2 = -4k^2(h-h')^2\Big\{1+\tfrac{1}{3}\eta hh'+\tfrac{1}{4}\theta khh'+\tfrac{1}{12}\theta'(h^2h'+hh'^2)\Big\}$$

ferner wird mit ausreichender Genauigkeit

$$a^2-5b^2-5c^2 = -10k^2-4h^2-2hh'-4h'^2$$

$$7b^4+7c^4+10b^2c^2 = 24k^4+24k^2(h^2+h'^2)+7h^4+10h^2h'^2+7h'^4$$

$$b^2+c^2 = 2k^2+h^2+h'^2$$

folglich

$$a^4(a^2-5b^2-5c^2)+a^2(7b^4+7c^4+10b^2c^2)-3(b^2-c^2)^2(b^2+c^2) = 8k^2(h-h')^2(3k^2+h^2+hh'+h'^2)$$

Ferner

$$3a^2-7b^2-3c^2 = -10k^2-6hh'-4h'^2$$

$$5b^4-3c^4-10b^2c^2 = -8k^4-16k^2h^2-3h^4-10h^2h'^2+5h'^4$$

$$b^2-3c^2 = -2k^2-3h^2+h'^2$$

folglich

$$a^4(3a^2-7b^2-3c^2)+a^2(5b^4-3c^4-10b^2c^2)-(b^2-c^2)^2(b^2-3c^2) = -8k^2(h-h')^2(k^2+3h^2-3hh'+h'^2)$$

Hiemit sind die Glieder entwickelt, aus welchen K und L bestehen, und

man erkennt leicht, dass sich die von M aus denen von L ergeben, wenn in diesen h und h' mit einander vertauscht werden. Aus diesem Grunde wird es überflüssig die Glieder, aus welchen M besteht, ausführlich hinzuschreiben. Stellt man jene zusammen, so erhält man

$$K = -k^2(h-h')^2\Big\{\frac{1}{72r^2}(12+4\eta hh'+3\theta khh'+\theta'(h^2h'+hh'^2)) + \frac{1}{90r^4}(3k^2+h^2+hh'+h'^2)\Big\}$$

$$L = -k^2(h-h')^2\Big\{\frac{1}{72r^2}(12+4\eta hh'+3\theta khh'+\theta'(h^2h'+hh'^2)) + \frac{1}{90r^4}(k^2+3h^2-3hh'+h'^2)\Big\}$$

Es ist zu bemerken, dass diese Functionen die Grundlage des Unterschiedes zwischen der Reduction des sphäroidischen Dreiecks auf das sphärische, und der Reduction desselben auf das ebene Dreieck bilden. Denn macht man in denselben r unendlich gross, so werden sie Null, und in den noch zu entwickelnden Functionen wird r nicht vorkommen.

124.

Den eingeführten Bezeichnungen zufolge wird im sphäroidischen Dreieck

$$bc\cos A = \sigma\cos\varphi\,.\,\sigma'\cos\varphi' + \sigma\sin\varphi\,.\,\sigma'\sin\varphi'$$

Da ferner aus demselben Grunde die erste Gleichung (132)

$$bc\cos(A+\delta A) = -\tfrac{1}{2}(h-h')^2+\tfrac{1}{2}\sigma^2+\tfrac{1}{2}\sigma'^2+K$$

giebt, so bekommt man leicht

$$bc(\cos A - \cos(A+\delta A))$$
$$= \tfrac{1}{2}(h-h')^2 - \tfrac{1}{2}(\sigma\cos\varphi-\sigma'\cos\varphi')^2 - \tfrac{1}{2}(\sigma\sin\varphi-\sigma'\sin\varphi')^2 - K$$

Ferner ist

$$ac\cos B = (h-h')\,\sigma\cos\psi$$
$$ab\cos C = -(h-h')\,\sigma'\cos\psi'$$

und die zweite und dritte der Gleichungen (132) werden

$$ac\cos(B+\delta B) = \tfrac{1}{2}(h-h')^2+\tfrac{1}{2}\sigma^2-\tfrac{1}{2}\sigma'^2+L$$

$$ab\cos(C+\delta C) = \tfrac{1}{2}(h-h')^2-\tfrac{1}{2}\sigma^2+\tfrac{1}{2}\sigma'^2+M$$

woraus

$$ac(\cos B - \cos(B+\delta B)) = -\tfrac{1}{2}(h-h')^2 + (h-h')\sigma\cos\psi - \tfrac{1}{2}(\sigma^2-\sigma'^2) - L$$

$$ab(\cos C - \cos(C+\delta C)) = -\tfrac{1}{2}(h-h')^2 - (h-h')\sigma'\cos\psi' + \tfrac{1}{2}(\sigma^2-\sigma'^2) - M$$

folgen. Man erkennt hieraus, dass δC aus δB vollständig durch Vertauschung von h und h' mit einander erhalten wird, weshalb im Folgenden nur die Entwickelungen von δA und δB vorgenommen zu werden brauchen.

125.

Die Reihen des Art. 118 geben bis auf Grössen der achten Ordnung

$$(\sigma\cos\varphi - \sigma'\cos\varphi')^2$$
$$= k^2(h-h')^2\left\{\tfrac{1}{9}\eta^2(h+h')^2 + \tfrac{5}{36}\eta\theta k(h+h')^2 + \tfrac{1}{18}\eta\theta'(h+h')(h^2+hh'+h'^2)\right\}$$

$$\begin{aligned}(\sigma\sin\varphi - \sigma'\sin\varphi')^2 = (h-h')^2\Big\{1 &+ \tfrac{1}{3}\eta k^2 + \tfrac{1}{12}(2\theta k^3 + \theta' k(h+h'))\\
&+ \tfrac{1}{60}(3\lambda k^4 + 3\lambda' k^3(h+h') + \lambda'' k^2(h^2+hh'+h'^2)\\
&+ \tfrac{1}{360}(4\mu k^5 + 6\mu' k^4(h+h') + 4\mu'' k^3(h^2+hh'+h'^2)\\
&\qquad + \mu''' k^2(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\\
&+ \tfrac{1}{45}\eta^2(3k^4 - 4k^2(h^2+hh'+h'^2))\\
&+ \tfrac{1}{540}\eta\theta k(36k^4 - 73k^2(h^2+hh'+h'^2))\\
&+ \tfrac{1}{360}\eta\theta'(17k^4(h+h') - 14k^2(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\Big\}\end{aligned}$$

woraus sich ohne Mühe

$$\begin{aligned}bc(\cos A - \cos(A+\delta A)) = -\tfrac{1}{2}k^2(h-h')^2\Big\{&\tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{12}(2\theta k + \theta'(h+h'))\\
&+ \tfrac{1}{60}(3\lambda k^2 + 3\lambda' k(h+h') + \lambda''(h^2+hh'+h'^2))\\
&+ \tfrac{1}{360}(4\mu k^3 + 6\mu' k^2(h+h') + 4\mu'' k(h^2+hh'+h'^2)\\
&\qquad + \mu'''(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\\
&+ \tfrac{1}{45}\eta^2(3k^2 + h^2 + 6hh' + h'^2)\\
&+ \tfrac{1}{540}\eta\theta k(36k^2 + 2h^2 + 77hh' + 2h'^2)\\
&+ \tfrac{1}{360}\eta\theta'(17k^2(h+h') + 6h^3 + 26h^2h' + 26hh'^2 + 6h'^3)\Big\}\\
&- K\end{aligned}$$

ergiebt. Man bekommt ferner aus den Reihen des angezogenen Artikels

$$2(h-h')\sigma\cos\psi-(\sigma^2-\sigma'^2)$$

$$=(h-h')^2\Big\{1-\tfrac{1}{8}\eta k^2-\tfrac{1}{12}(3\theta k^3+\theta' k^2(2h+h'))$$

$$-\tfrac{1}{60}(6\lambda k^4+4\lambda' k^3(2h+h')+\lambda'' k^2(3h^2+2hh'+h'^2))$$

$$-\tfrac{1}{360}(10\mu k^5+10\mu' k^4(2h+h')+5\mu'' k^3(3h^2+2hh'+h'^2)$$

$$+\mu''' k^2(4h^3+3h^2h'+2hh'^2+h'^3))$$

$$-\tfrac{1}{45}\eta^2(k^4+k^2(3h^2+2hh'+h'^2))$$

$$-\tfrac{1}{108}\eta\theta k(3k^4+2k^2(3h^2+2hh'+h'^2))$$

$$-\tfrac{1}{1080}\eta\theta'(25k^4(2h+h')+18k^2(4h^3+3h^2h'+2hh'^2+h'^3))\Big\}$$

und hieraus

$$ac(\cos B-\cos(B+\delta B))$$

$$=-\tfrac{1}{2}k^2(h-h')^2\Big\{\tfrac{1}{8}\eta+\tfrac{1}{12}(3\theta k+\theta'(2h+h'))$$

$$+\tfrac{1}{60}(6\lambda k^2+4\lambda' k(2h+h')+\lambda''(3h^2+2hh'+h'^2))$$

$$+\tfrac{1}{360}(10\mu k^3+10\mu' k^2(2h+h')+5\mu'' k(3h^2+2hh'+h'^2)$$

$$+\mu'''(4h^3+3h^2h'+2hh'^2+h'^3))$$

$$+\tfrac{1}{45}\eta^2(k^2+3h^2+2hh'+h'^2)$$

$$+\tfrac{1}{108}\eta\theta k(3k^2+6h^2+4hh'+2h'^2)$$

$$+\tfrac{1}{1080}\eta\theta'(25k^2(2h+h')+72h^3+54h^2h'+36hh'^2+18h'^3)\Big\}-L$$

Es ist ferner

$$bc\sin A=\sigma\sin\varphi\,.\,\sigma'\cos\varphi'-\sigma\cos\varphi\,.\,\sigma'\sin\varphi'$$

$$ac\sin B=(h-h')\sigma\sin\psi$$

oder, nach der Substitution der Reihen, mit ausreichender Genauigkeit,

$$bc\sin A=k(h-h')\Big\{1+\tfrac{1}{6}\eta(k^2+2hh')$$

$$+\tfrac{1}{24}\theta k(2k^2+5hh')+\tfrac{1}{24}\theta'(k^2(h+h')+2h^2h'+2hh'^2)\Big\}$$

$$ac\sin B=k(h-h')\Big\{1+\tfrac{1}{6}\eta h^2+\tfrac{1}{8}\theta kh^2+\tfrac{1}{12}\theta' h^3)\Big\}$$

womit alle zur Erlangung von δA und δB erforderlichen Ausdrücke entwickelt sind, und nur noch mit einander combinirt zu werden brauchen.

126.

Durch Divisionen und Substitutionen der Ausdrücke von K und L ergiebt sich aus den Ausdrücken des vor. Art. zuerst

$$\frac{\cos A - \cos(A+\delta A)}{\sin A}$$

$$= -\tfrac{1}{2}k(h-h')\Big\{\tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{12}(2\theta k + \theta'(h+h')) - \tfrac{1}{8r^3}$$
$$+ \tfrac{1}{90}\eta^2(k^2 + 2h^2 + 2hh' + 2h'^2) + \tfrac{1}{18r^3}\eta k^2$$
$$+ \tfrac{1}{1080}\eta\theta k(12k^2 + 4h^2 + 19hh' + 4h'^2) + \tfrac{1}{72r^3}\theta k(2k^2 - hh')$$
$$+ \tfrac{1}{360}\eta\theta'(7k^2(h+h') + 6h^3 + 6h^2h' + 6hh'^2 + 6h'^3) + \tfrac{1}{72r^3}\theta' k^2(h+h')$$
$$- \tfrac{1}{45r^4}(3k^2 + h^2 + hh' + h'^2)$$
$$+ \tfrac{1}{60}(3\lambda k^2 + 3\lambda' k(h+h') + \lambda''(h^2 + hh' + h'^2))$$
$$+ \tfrac{1}{360}(4\mu k^3 + 6\mu' k^2(h+h') + 4\mu'' k(h^2 + hh' + h'^2) + \mu'''(h^3 + h^2h' + hh'^2 + h'^3))\Big\}$$

$$\frac{\cos B - \cos(B+\delta B)}{\sin B}$$

$$= -\tfrac{1}{2}k(h-h')\Big\{\tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{12}(3\theta k + \theta'(2h+h')) - \tfrac{1}{3r^3}$$
$$+ \tfrac{1}{90}\eta^2(2k^2 + h^2 + 4hh' + 2h'^2) + \tfrac{1}{18r^3}\eta(h^2 - 2hh')$$
$$+ \tfrac{1}{108}\eta\theta k(3k^2 - 3h^2 + 4hh' + 2h'^2) + \tfrac{1}{24r^3}\theta k(h^2 - 2hh')$$
$$+ \tfrac{4}{1080}\eta\theta'(25k^2(2h+h') + 12h^3 + 39h^2h' + 36hh'^2 + 18h'^3) + \tfrac{1}{36r^3}\theta'(h^3 - h^2h' - hh'^2)$$
$$- \tfrac{1}{45r^4}(k^2 + 3h^2 - 3hh' + h'^2)$$
$$+ \tfrac{1}{60}(6\lambda k^2 + 4\lambda' k(2h+h') + \lambda''(3h^2 + 2hh' + h'^2))$$
$$+ \tfrac{1}{360}(10\mu k^3 + 10\mu' k^2(2h+h') + 5\mu'' k(3h^2 + 2hh' + h'^2)$$
$$+ \mu'''(4h^3 + 3h^2h' + 2hh'^2 + h'^3))\Big\}$$

Setzt man nun für einen Augenblick

$$\frac{\cos A - \cos(A+\delta A)}{\sin A} = p$$

so wird

$$\delta A = p - \tfrac{1}{2}p^2 \operatorname{cotg} A$$

und einen analogen Ausdruck bekommt man für δB. Der Art. 118 giebt aber mit hier ausreichender Genauigkeit

$$\operatorname{cotg} A = \frac{k^2 + hh'}{k(h-h')}\ ; \quad \operatorname{cotg} B = \frac{h}{k}$$

und aus den vorstehenden Ausdrücken erhält man

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos A - \cos(A+\delta A)}{\sin A}\right)^2 = \frac{1}{4}k^2(h-h')^2\Big\{&\frac{1}{9}\eta^2 - \frac{2}{9r^2}\eta \\ &+ \frac{1}{9}\eta\theta k - \frac{1}{9r^2}\theta k \\ &+ \frac{1}{18}\eta\theta'(h+h') - \frac{1}{18r^2}\theta'(h+h') + \frac{1}{9r^4}\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos B - \cos(B+\delta B)}{\sin B}\right)^2 = \frac{1}{4}k^2(h-h')^2\Big\{&\frac{1}{9}\eta^2 - \frac{2}{9r^2}\eta \\ &+ \frac{1}{6}\eta\theta k - \frac{1}{6r^2}\theta k \\ &+ \frac{1}{18}\eta\theta'(2h+h') - \frac{1}{18r^2}\theta'(2h+h') + \frac{1}{9r^4}\Big\}\end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke so ergiebt sich leicht

$$\begin{aligned}\delta A = -\frac{1}{2}k(h-h')\Big\{&\frac{1}{3}\eta + \frac{1}{6}\theta k + \frac{1}{12}\theta'(h+h') - \frac{1}{8r^2} \\ &+ \frac{\eta^2}{180}(7k^2 + 4h^2 + 9hh' + 4h'^2) - \frac{\eta}{18r^2}hh' \\ &+ \frac{\eta\theta k}{1080}(42k^2 + 4h^2 + 49hh' + 4h'^2) - \frac{\theta k}{24r^2}hh' \\ &+ \frac{\eta\theta'}{360}(12k^2(h+h') + 6h^3 + 11h^2h' + 11hh'^2 + 6h'^3) \\ &\quad - \frac{\theta'}{72r^2}(h^2h' + hh'^2) - \frac{1}{180r^4}(7k^2 + 4h^2 - hh' + 4h'^2) \\ &+ \frac{1}{60}(3\lambda k^2 + 3\lambda' k(h+h') + \lambda''(h^2 + hh' + h'^2)) \\ &+ \frac{1}{360}(4\mu k^3 + 6\mu' k^2(h+h') + 4\mu'' k(h^2 + hh' + h'^2) \\ &\qquad + \mu'''(h^3 + h^2h' + hh'^2 + h'^3))\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta B = -\frac{1}{2}k(h-h')\Big\{&\frac{1}{8}\eta + \frac{1}{4}\theta k + \frac{1}{12}\theta'(2h+h') - \frac{1}{8r^2} \\ &+ \frac{\eta^2}{180}(4k^2 + 7h^3 + 3hh' + 4h'^2) - \frac{\eta}{18r^2}hh' \\ &+ \frac{\eta\theta k}{216}(6k^2 + 3h^2 - hh' + 4h'^2) - \frac{\theta k}{24r^2}hh' \\ &+ \frac{\eta\theta'}{1080}(25k^2(2h+h') + 42h^3 + 24h^2h' + 21hh'^2 + 18h'^3) \\ &\quad - \frac{\theta'}{72r^2}(h^2h' + hh'^2) - \frac{1}{180r^4}(4k^2 + 7h^2 - 7hh' + 4h'^2) \\ &+ \frac{1}{60}(6\lambda k^2 + 4\lambda' k(2h+h') + \lambda''(3h^2 + 2hh' + h'^2)) \\ &+ \frac{1}{360}(10\mu k^3 + 10\mu' k^2(2h+h') + 5\mu'' k(3h^2 + 2hh' + h'^2) \\ &\qquad + \mu'''(4h^3 + 3h^2h' + 2hh'^2 + h'^3))\Big\}\end{aligned}$$

die bis auf Grössen sechster Ordnung richtig sind, und womit die Aufgabe schon gelöst ist.

127.

Die eben erhaltene Auflösung unserer Aufgabe kann durch Einführung der Dreiecksfläche, der oben schon angewandten Krümmungsmaasse, und der Dreiecksseiten und Winkel vereinfacht werden. Die Anwendung der Gleichung (130) giebt

$$\begin{aligned}
\delta A = -\Delta \Big\{ & \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{12}(2\theta k + \theta'(h+h')) - \tfrac{1}{8r^2} \\
& + \tfrac{\eta^2}{180}(2k^2 - h^2 + 4hh' - h'^2) + \tfrac{\eta}{36r^2}(k^2 + h^2 - hh' + h'^2) \\
& + \tfrac{\eta\theta k}{1080}(9k^2 - 32h^2 + 13hh' - 32h'^2) + \tfrac{\theta k}{360r^2}(6k^2 + 7h^2 - 8hh' + 7h'^2) \\
& + \tfrac{\eta\theta'}{720}(13k^2(h+h') - h^3 - 4h^2h' - 4hh'^2 - h'^3) \\
& \qquad + \tfrac{\theta'}{360r^2}(3k^2(h+h') + 4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3) \\
& \qquad - \tfrac{1}{180r^4}(7k^2 + 4h^2 - hh' + 4h'^2) \\
& + \tfrac{1}{60}(3\lambda k^2 + 3\lambda' k(h+h') + \lambda''(h^2 + hh' + h'^2)) \\
& + \tfrac{1}{360}(4\mu k^3 + 6\mu' k^2(h+h') + 4\mu'' k(h^2 + hh' + h'^2) \\
& \qquad + \mu'''(h^3 + h^2h' + hh'^2 + h'^3))\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta B = -\Delta \Big\{ & \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{12}(3\theta k + \theta'(2h+h')) - \tfrac{1}{8r^2} \\
& - \tfrac{\eta^2}{180}(k^2 - 2h^2 + 2hh' + h'^2) + \tfrac{\eta}{36r^2}(k^2 + h^2 - hh' + h'^2) \\
& - \tfrac{\eta\theta k}{2160}(21k^2 + 57h^2 + 97hh' + 47h'^2) + \tfrac{\theta k}{360r^2}(6k^2 + 7h^2 - 8hh' + 7h'^2) \\
& + \tfrac{\eta\theta'}{2160}(52k^2h + 17k^2h' + 30h^3 - 21hh'^2 - 27hh'^2 - 3h'^3) \\
& \qquad + \tfrac{\theta'}{360r^2}(3k^2(h+h') + 4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3) \\
& \qquad - \tfrac{1}{180r^4}(4k^2 + 7h^2 - 7hh' + 4h'^2) \\
& + \tfrac{1}{60}(6\lambda k^2 + 4\lambda' k(2h+h') + \lambda''(3h^2 + 2hh' + h'^2)) \\
& + \tfrac{1}{360}(10\mu k^3 + 10\mu' k^2(2h+h') + 5\mu'' k(3h^2 + 2hh' + h'^3) \\
& \qquad + \mu'''(4h^3 + 3h^2h' + 2hh'^2 + h'^3))\Big\}
\end{aligned}$$

und führt man hierin die Krümmungsmaasse durch die Gleichungen (128) ein, so entstehen

$$\delta A = -\frac{\Delta}{12}\left\{2\alpha+\beta+\gamma\right\} + \frac{\Delta}{3r^2}$$

$$-\frac{\Delta\alpha^2}{4320}\left\{3k^2-4h^2+11hh'-4h'^2\right\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{4k^2+3h^2-2hh'+3h'^2\right\}$$

$$-\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\left\{9k^2-3h^2+13hh'-h'^2\right\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{3k^2+4h^2-4hh'+3h'^2\right\}$$

$$-\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\left\{9k^2-h^2+13hh'-3h'^2\right\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{3k^2+3h^2-4hh'+4h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{180r^4}\left\{7k^2+4h^2-hh'+4h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{120}\left\{4\lambda k^2+4\lambda' k(h+h')+\lambda''(3h^2-2hh'+3h'^2)\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{360}\left\{6\mu k^3+9\mu' k^2(h+h')+\mu'' k(11h^2-4hh'+11h'^2)\right.$$

$$\left.+\mu'''(4h^3-h^2h'-hh'^2+4h'^3)\right\}$$

$$\delta B = -\frac{\Delta}{12}\left\{\alpha+2\beta+\gamma\right\} + \frac{\Delta}{3r^2}$$

$$-\frac{\Delta\alpha^2}{2160}\left\{9k^2-39h^2+73hh'-25h'^2\right\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{4k^2+3h^2-2hh'+3h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\left\{8k^2-30h^2+54hh'-16h'^2\right\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{3k^2+4h^2-4hh'+3h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\left\{13k^2-33h^2+43hh'+3h'^2\right\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{3k^2+3h^2-4hh'+4h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{180r^4}\left\{4k^2+7h^2-7hh'+4h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{120}\left\{3\lambda k^2+2\lambda' k(2h+h')+\lambda''(4h^2-4hh'+3h'^2)\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{360}\left\{5\mu k^3+5\mu' k^2(2h+h')+\mu'' k(15h^2-10hh'+10h'^2)\right.$$

$$\left.+\mu'''(6h^3-3h^2h'-2hh'^2+4h'^3)\right\}$$

auch bis auf Grössen sechster Ordnung richtig. Wenn man nun in diesem Ausdruck von δB um δC zu erhalten, h und h' mit einander vertauscht, so müssen auch β und γ mit einander vertauscht werden.

128.

Führt man endlich in die eben erhaltenen Ausdrücke die Dreiecksstücke a, c, B ein, und schreibt auch den Ausdruck für δC hin, dann wird schliesslich

$$\begin{aligned}\delta A = & -\frac{\Delta}{12}\left\{2\alpha+\beta+\gamma\right\} + \frac{\Delta}{3r^2}\\
& -\frac{\Delta\alpha^2}{1080}\left\{3c^2-3ac\cos B-4a^2\right\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{4c^2-4ac\cos B+3a^2\right\}\\
& -\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\left\{9c^2-11ac\cos B-a^2\right\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{3c^2-2ac\cos B+3a^2\right\}\\
& -\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\left\{9c^2-7ac\cos B-3a^2\right\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{3c^2-4ac\cos B+4a^2\right\}\\
& \qquad\qquad + \frac{\Delta}{180r^4}\left\{7c^2-7ac\cos B+4a^2\right\}\\
& +\frac{\Delta}{120}\left\{4Ac^2-4A'ac+3A''a^2\right\}\\
& +\frac{\Delta}{360}\left\{6Mc^3-9M'ac^2+11M''a^2c-4M'''a^3\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta B = & -\frac{\Delta}{12}\left\{\alpha+2\beta+\gamma\right\} + \frac{\Delta}{3r^2}\\
& -\frac{\Delta\alpha^2}{2160}\left\{9c^2-23ac\cos B-25a^2\right\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{4c^2-4ac\cos B+3a^2\right\}\\
& +\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\left\{8c^2-22ac\cos B-16a^2\right\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{3c^2-2ac\cos B+3a^2\right\}\\
& +\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\left\{13c^2-49ac\cos B+3a^2\right\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{3c^2-4ac\cos B+4a^2\right\}\\
& \qquad\qquad + \frac{\Delta}{180r^4}\left\{4c^2-ac\cos B+4a^2\right\}\\
& +\frac{\Delta}{120}\left\{3Ac^2-2A'ac+3A''a^2\right\}\\
& +\frac{\Delta}{360}\left\{5Mc^3-5M'ac^2+10M''a^2c-4M'''a^3\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta C = & -\frac{\Delta}{12}\left\{\alpha+\beta+2\gamma\right\} + \frac{\Delta}{3r^2}\\
& -\frac{\Delta\alpha^2}{2160}\left\{9c^3+5ac\cos B-39a^2\right\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{4c^2-4ac\cos B+3a^2\right\}\\
& +\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\left\{13c^2+23ac\cos B-33a^2\right\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{3c^2-2ac\cos B+3a^2\right\}\\
& +\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\left\{8c^2+6ac\cos B-30a^2\right\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{3c^2-4ac\cos B+4a^2\right\}\\
& \qquad\qquad + \frac{\Delta}{180r^4}\left\{4c^2-7ac\cos B+7a^2\right\}\\
& +\frac{\Delta}{120}\left\{3Ac^2-4A'ac+4A''a^2\right\}\\
& +\frac{\Delta}{360}\left\{5Mc^3-10M'ac^2+15M''a^2c-6M'''a^3\right\}\end{aligned}$$

die gleichwie die vorhergehenden Ausdrücke bis auf Grössen sechster Ordnung genau sind. Die hier angewandten Hülfsgrössen A, A', A'', M, M', M'', M''' sind dieselben, die durch die Gleichungen (131) eingeführt worden sind.

129.

Man kann mit wenig Mühe aus den vorstehenden Ausdrücken noch ein interessantes Resultat ziehen, nemlich eine Relation zwischen der Fläche des sphäroidischen, und der des sphärischen Dreiecks, auf welches jenes hingeführt worden ist. Sei die Fläche dieses sphärischen Dreiecks mit Δ' bezeichnet, dann ist

$$A + B + C + \delta A + \delta B + \delta C = 180^0 + \frac{\Delta'}{r^2}$$

setzt man in die linke Seite dieses Ausdrucks für die darin vorkommenden Grössen ihre aus den Artt. 122 und 128 zu entnehmenden Werthe, so erhält man sogleich

$$\begin{aligned} \Delta' = \Delta & - \frac{\Delta\alpha}{120}\left\{4\,c^2 - 4\,ac\cos B + 3\,a^2\right\} \\ & - \frac{\Delta\beta}{120}\left\{3\,c^2 - 2\,ac\cos B + 3\,a^2\right\} \\ & - \frac{\Delta\gamma}{120}\left\{3\,c^2 - 4\,ac\cos B + 4\,a^2\right\} \\ & + \frac{\Delta}{12r^2}\left\{c^2 - ac\cos B + a^2\right\} \end{aligned}$$

welcher Ausdruck auch bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist. Da leicht im Voraus erkannt werden kann, dass im Unterschiede zwischen Δ' und Δ alle Glieder, die in den vorhergehenden, hiefür benutzten, Ausdrücken von r unabhängig sind, verschwinden müssen, und diese sich im vorstehenden Ausdruck in der That gegenseitig aufgehoben haben, so ist hiemit eine Controlle eines grossen Theils der vorhergehenden Entwickelungen erlangt. Da ferner der vorstehende Ausdruck, wenn man die Krümmungsmaasse α, β, γ einander gleich setzt, $\Delta' = \Delta$ werden muss, und dieses auch der Fall ist, so ist hiemit eine Controlle für einen anderen Theil der vorhergehenden Entwickelungen erlangt worden.

Wenn man in allen Gaussischen, sich auf die hier behandelte Aufgabe beziehenden, Ausdrücken statt der von ihm angewandten, und mit f^0, f', f'', g^0, g', h^0 bezeichneten Coefficienten die hier angewandten und mit η, θ, θ' λ, λ', λ'' bezeichneten Coefficienten einführt*), so wird

*) Die hiefür anzuwendenden Relationen sind:

$$f^0 = -\tfrac{1}{2}\eta\,,\quad f' = -\tfrac{1}{2}\theta\,,\quad f'' = -\tfrac{1}{4}\lambda$$
$$g^0 = -\tfrac{1}{6}\theta'\,,\quad g' = -\tfrac{1}{6}\lambda'\,,\quad h^0 = -\tfrac{1}{24}\lambda'' + \tfrac{1}{24}\eta^2$$

man, in so weit die Vergleichung überhaupt möglich ist, völlige Uebereinstimmung finden.

130.

In Bezug auf den im Art. 113 eingeführten Winkel v sind noch die folgenden Erklärungen erforderlich. Es wurde dort v als der Winkel definirt, den die Hauptkrümmungslinie auf der Oberfläche, in deren Ebene die Achse der x gelegt worden ist, mit dem ersten Element der kürzesten Linie macht, die vom Punkt A ausgeht, und für welche $\varphi = 0$ ist. Der Anfangspunkt von v wurde in den Zweig der Hauptkrümmungslinie verlegt, in welchem die x positiv sind. Da die genannte kürzeste Linie, welche weiter hin im Verlaufe der Entwickelungen mit k bezeichnet wurde, eliminirt, und durch die ähnlichen σ und σ', oder welches dasselbe ist, durch die Dreiecksseiten c und b ersetzt worden ist, so kann man v nicht als unmittelbar gegeben betrachten, sondern muss statt dessen den Winkel zwischen der genannten Hauptkrümmungslinie und einer der beiden Dreiecksseiten b oder c als eine unmittelbar gegebene Grösse betrachten.

Der Winkel zwischen der genannten Hauptkrümmungslinie und σ, oder der Dreiecksseite c, wurde a. a. O. schon unter der Bezeichnung χ eingeführt, und sieht man diesen Winkel als gegeben an, so wird

$$v = \chi - \varphi$$

Aus den Reihen des Art. 118 erhält man aber mit hier ausreichender Genauigkeit

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{k} = \operatorname{cotg} B$$

und folglich wird

$$v = \chi + B - 90^0$$

Will man statt dessen den Winkel zwischen derselben Hauptkrümmungslinie und der Dreiecksseite b als gegeben betrachten, und bezeichnet man diesen mit χ', so findet man ohne Weiteres

$$v = \chi' + B + A - 90^0$$

Hiemit sind alle in unserer Aufgabe vorkommenden Grössen vollständig erklärt.

131.

Die zunächst liegende Anwendung der vorhergehenden Auflösung der allgemeinen Aufgabe bietet die Kugel dar, und es soll daher jetzt angenommen werden, dass die allgemeine Oberfläche in die Oberfläche einer Kugel von dem Halbmesser r übergeht. Aus den Entwickelungen des Art. 113 geht nun hervor, dass in diesem Falle

$$\eta = \frac{1}{r^2}$$

und dass alle übrigen Coefficienten θ, θ', λ, λ' λ'', μ, etc., wie weit man auch die Entwickelungen fortsetzt, Null sind. Es wird folglich

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{r^2}$$

Setzt man nun diese Werthe in den letzten Ausdruck für Δ des Art. 121, so wird zuerst

$$\Delta = \frac{1}{2}\, ac \sin B \Big\{ 1 + \frac{1}{12r^2}(a^2 - 3\,ac\cos B + c^2) + \frac{1}{360r^4}(3\,a^4 - 5\,a^2c^2 + 3\,c^4 - 15\,ab^2c\cos B) \Big\}$$

aber, die sphärische Trigonometrie giebt allgemein

$$(133) \qquad ac\cos B = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 \\ \frac{1}{24r^2}(a^4 - 2\,a^2b^2 - 2\,a^2c^2 + b^4 - 2\,b^2c^2 + c^4)$$

und eliminirt man hiemit $\cos B$ aus dem vorstehenden Ausdruck, so wird er

$$\Delta = \frac{1}{2}\, ac \sin B \Big\{ 1 - \frac{1}{24r^2}(a^2 - 3\,b^2 + c^2) - \frac{a^4}{480r^4} + \frac{b^4}{96r^4} + \frac{a^2c^2}{144r^4} - \frac{c^4}{480r^4} \Big\}$$

mit dem Art. 82 vollständig übereinstimmend. Macht man dieselben Substitutionen in dem letzten Ausdruck der Summe der Winkel des sphäroidischen Dreiecks des Art. 122, und erwägt, dass jetzt auch alle Coefficienten $\mathit{\Delta}$, $\mathit{\Delta}'$, $\mathit{\Delta}''$, M, M', M'', M''', etc. Null werden, so wird dieser

$$A + B + C = 180^0 + \frac{\Delta}{r^2}$$

welches eine bekannte Gleichung der sphärischen Trigonometrie ist. Führt man auch dieselben Substitutionen in die Ausdrücke des Art. 128 ein, so findet man

$$\delta A = \delta B = \delta C = 0$$

welche Gleichungen sich von selbst verstehen. Macht man hingegen in denselben, sonst unveränderten Gleichungen erst r unendlich gross, und führt darauf die oben genannten Substitutionen ein, so bekommt man, nachdem auch B eliminirt worden ist, für die Reduction des sphärischen Dreiecks auf das ebene,

$$\delta A = -\frac{\Delta}{3}\left\{1 - \frac{a^2}{30r^2} + \frac{b^2}{60r^2} + \frac{c^2}{60r^2}\right\}$$
$$\delta B = -\frac{\Delta}{3}\left\{1 + \frac{a^2}{60r^2} - \frac{b^2}{30r^2} + \frac{c^2}{60r^2}\right\}$$
$$\delta C = -\frac{\Delta}{3}\left\{1 + \frac{a^2}{60r^2} + \frac{b^2}{60r^2} - \frac{c^2}{30r^2}\right\}$$

mit den Ausdrücken (96) des Art. 80 vollständig übereinstimmend.

132.

Es soll zweitens die Anwendung der vorhergehenden allgemeinen Formeln auf das abgeplattete Revolutionsellipsoid ausgeführt, und zu dem Ende die Gleichung dieser Oberfläche wie früher in folgender Form aufgestellt werden,

$$\frac{x^2 + y^2}{n^2} + \frac{z^2}{m^2} = 1$$

Hier liegen wieder die Achsen der x und y im Aequator, und es soll ausserdem die Achse der x in dem Meridian liegen, von welchem an man die Längen zählen will; die Achse der z liegt wieder in der Umdrehungsachse des Revolutionsellipsoids. Die grosse Halbachse ist hier, um Verwechselung mit den Dreiecksseiten vorzubeugen mit n, und die kleine Halbachse aus demselben Grunde mit m bezeichnet worden.

Verlegt man nun zuerst den Anfangspunkt dieser Coordinaten in den Punkt der Oberfläche, dessen Coordinaten $\xi, 0, \zeta$ sind, dann wird, wenn die reducirte Breite desselben mit β bezeichnet wird,

$$\xi = n \cos\beta\,, \quad \zeta = m \sin\beta$$

und die Gleichung der Oberfläche geht, wenn man die neuen Coordinaten allgemein mit x', y, z' bezeichnet, über in

$$\frac{x'^2 + y^2}{n^2} + \frac{z'^2}{m^2} + 2\frac{x'}{n}\cos\beta + 2\frac{z'}{m}\sin\beta = 0$$

Dreht man ferner die Achsen der x' und z' so, dass die der z' in der Normale des Anfangspunkts zu liegen kommt, und im Innern des Revolutionsellipsoids die z' positiv werden, so muss, wenn B die Polhöhe des Anfangspunkts der Coordinaten bezeichnet,

$$x' = \quad x \sin B - z \cos B$$
$$z' = -x \cos B - z \sin B$$

substituirt werden.*) Man erhält hierauf für die Gleichung der Oberfläche

$$x^2\left(\frac{\sin^2 B}{n^2}+\frac{\cos^2 B}{m^2}\right)+\frac{y^2}{n^2}+z^2\left(\frac{\cos^2 B}{n^2}+\frac{\sin^2 B}{m^2}\right)+2xz\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\sin B\cos B$$
$$+2x\left(\frac{\sin B\cos\beta}{n}-\frac{\cos B\sin\beta}{m}\right)-2z\left(\frac{\cos B\cos\beta}{n}+\frac{\sin B\sin\beta}{m}\right)=0$$

Aber, wenn wieder die Excentricität der Meridiane mit e bezeichnet wird, so ist

$$m^2 = n^2(1-e^2)$$

und

$$\sin^2 B = \frac{\sin^2\beta}{1-e^2\cos^2\beta}$$
$$\cos^2 B = \frac{(1-e^2)\cos^2\beta}{1-e^2\cos^2\beta}$$

womit die Gleichung des Revolutionsellipsoids schliesslich in

$$(134) \quad . \quad . \quad x^2 + Ay^2 + Bz^2 + 2\,Cxz - 2\,Dz = 0$$

übergeht, nachdem zur Abkürzung

$$A = 1 - e^2\cos^2\beta$$
$$B = \frac{1-(2e^2-e^4)\cos^2\beta}{1-e^2}$$
$$C = \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta\cos\beta$$
$$D = n\,\frac{(1-e^2\cos^2\beta)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-e^2}}$$

gesetzt worden ist. Die Achse der x, die unbeschadet der Umformungen immer in demselben Meridian liegen geblieben ist, liegt hiemit zugleich in der einen der beiden Hauptkrümmungsebenen des Revolutionsellipsoids, da immer auf dieser Oberfläche die Meridiane Hauptkrümmungslinien sind. Es ist ferner, wenn wir uns den Punkt A auf der nördlichen Hälfte des Revolutionsellipsoids denken, der positive Zweig der x Achse nach Süden gerichtet, und die im Art. 130 erklärten Winkel χ und χ' werden die vom Südpunkt des Horizonts zu zählenden Azimuthe der Dreiecksseiten c und b.

*) Da hier keine schädliche Verwechselung entstehen kann, so habe ich für die neuen Coordinaten wieder die Bezeichnungen x und z gewählt, obgleich sie mit den oben eben so bezeichneten auf keine Weise identisch sind.

133.

Die erste Differentiation der Gleichung (134) giebt

$$xdx + Aydy + Bzdz + Cxdz + Czdx - Ddz = 0$$

Betrachtet man nun z als Function von x und y, und setzt wie oben,

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad s = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right), \quad t = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

so erhält man hieraus

$$p = \frac{x + Cz}{D - Cx - Bz}, \quad q = \frac{Ay}{D - Cx - Bz}$$

deren Differentiation

$$r = \frac{1 + Cp}{D - Cx - Bz} + \frac{(x + Cz)\,(C + Bp)}{(D - Cx - Bz)^2}$$

$$s = \frac{Cq}{D - Cx - Bz} + \frac{(x + Cz)\,Bq}{(D - Cx - Bz)^2} = \frac{(C + Bp)\,Ay}{(D - Cx - Bz)^2}$$

$$t = \frac{A}{D - Cx - Bz} + \frac{AByq}{(D - Cx - Bz)^2}$$

giebt. Durch fortgesetzte Differentiationen dieser Gleichungen, und nachdem schliesslich in allen Ausdrücken $x = y = z = 0$ gesetzt worden war, ergab sich

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0$$

$$r_0 = \frac{1}{D}, \quad s_0 = 0, \quad t_0 = \frac{A}{D}$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_0 = 3\frac{C}{D^3}, \quad \left(\frac{dr}{dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 = \frac{AC}{D^3}, \quad \left(\frac{dt}{dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)_0 = 3\frac{B}{D^3} + 12\frac{C^2}{D^5}, \quad \left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)_0 = \frac{AB}{D^3} + 2\frac{AC^2}{D^5}, \quad \left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right)_0 = 3\frac{A^2B}{D^3}$$

$$\left(\frac{d^3r}{dx^3}\right)_0 = 45\frac{BC}{D^4} + 60\frac{C^3}{D^4}, \quad \left(\frac{d^3r}{dx^2dy}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^3r}{dxdy^2}\right)_0 = 9\frac{ABC}{D^4} + 6\frac{AC^2}{D^4}$$

$$\left(\frac{d^3t}{dx^2dy}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^3t}{dx\,dy^2}\right)_0 = 9\frac{A^2BC}{D^4}, \quad \left(\frac{d^3t}{dy^3}\right)_0 = 0$$

Da allgemein

$$\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right); \quad \left(\frac{d^3r}{dy^3}\right) = \left(\frac{d^3t}{dx^2dy}\right); \quad \left(\frac{d^3t}{dx^3}\right) = \left(\frac{d^3r}{dx\,dy^2}\right)$$

ist, so sind hiemit alle erforderlichen Differentialquotienten gegeben.

134.

Da nun allgemein

$$\left(\frac{d.rt}{dx}\right) = t\left(\frac{dr}{dx}\right) + r\left(\frac{dt}{dx}\right);\quad \left(\frac{d.rt}{dy}\right) = t\left(\frac{dr}{dy}\right) + r\left(\frac{dt}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^2.rt}{dx^2}\right) = t\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + r\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^2.rt}{dxdy}\right) = t\left(\frac{d^2r}{dxdy}\right) + \left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + \left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + r\left(\frac{d^2t}{dxdy}\right)$$

$$\left(\frac{d^2.rt}{dy^2}\right) = t\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) + 2\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + r\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dx^3}\right) = t\left(\frac{d^3r}{dx^3}\right) + 3\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + 3\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + r\left(\frac{d^3t}{dx^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dx^2dy}\right) = t\left(\frac{d^3r}{dx^2dy}\right) + \left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + 2\left(\frac{d^2r}{dxdy}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + 2\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{d^2t}{dxdy}\right)$$
$$+ \left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + r\left(\frac{d^3t}{dx^2dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dxdy^2}\right) = t\left(\frac{d^3r}{dxdy^2}\right) + \left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + 2\left(\frac{d^2r}{dxdy}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + 2\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{d^2t}{dxdy}\right)$$
$$+ \left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) + r\left(\frac{d^3t}{dxdy^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dy^3}\right) = t\left(\frac{d^3r}{dy^3}\right) + 3\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + 3\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) + r\left(\frac{d^3t}{dy^3}\right)$$

ist, so geben die Entwickelungen des vor. Art. für das Revolutions-ellipsoid

$$\left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0 = 4\,\frac{AC}{D^3};\quad \left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^2.rt}{dx^2}\right)_0 = 4\,\frac{AB}{D^4} + 20\,\frac{AC^2}{D^4};\quad \left(\frac{d^2.rt}{dxdy}\right)_0 = 0;\quad \left(\frac{d^2.rt}{dy^2}\right)_0 = 4\,\frac{A^2B}{D^4} + 2\,\frac{A^2C^2}{D^4}$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dx^3}\right)_0 = 72\,\frac{ABC}{D^5} + 120\,\frac{AC^3}{D^5};\quad \left(\frac{d^3.rt}{dx^2dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dxdy^2}\right)_0 = 28\,\frac{A^2BC}{D^5} + 8\,\frac{A^2C^3}{D^5};\quad \left(\frac{d^3.rt}{dy^3}\right)_0 = 0$$

und durch die Substitution in die Ausdrücke des Art. 113 erhält man

$$\begin{aligned}
\pi &= 4\,\frac{AB}{D^4} + 20\,\frac{AC^2}{D^4} - 4\,\frac{A}{D^4}\\
\pi' &= 0\\
\pi'' &= 4\,\frac{A^2B}{D^4} - 4\,\frac{A^2}{D^4}\\
\varrho &= 72\,\frac{ABC}{D^5} - 88\,\frac{AC}{D^5} + 120\,\frac{AC^3}{D^5}\\
\varrho' &= 0\\
\varrho'' &= 24\,\frac{A^2BC}{D^5} - \frac{16}{8}\,\frac{A^2C}{D^5} - 24\,\frac{A^2C}{D^5}\\
\varrho''' &= 0
\end{aligned}$$

135.

Die vorhergehenden Formeln sind strenge, und gelten für jeden Werth der Excentricität des Ellipsoids, betrachtet man aber von jetzt an e als eine kleine Grösse erster Ordnung, und übergeht die mit e^4, etc. multiplicirten Glieder, so werden sie weit einfacher, und gehen in die folgenden über,

$$\pi = \frac{4e^2}{n^4}(1 - 2\cos^2\beta), \quad \pi' = 0$$

$$\pi'' = \frac{4e^2}{n^4}(1 - \cos^2\beta)$$

$$\varrho = -\frac{16e^2}{n^5}\sin\beta\cos\beta, \quad \varrho' = 0$$

$$\varrho'' = -\frac{16e^2}{3n^5}\sin\beta\cos\beta, \quad \varrho''' = 0$$

zufolge der Art. 113 und 130 ergiebt sich hieraus

$$\lambda = \frac{4e^2}{n^4}\sin^2\beta - \frac{4e^2}{n^4}\cos^2\beta\sin^2(\chi + B)$$

$$\lambda' = -\frac{4e^2}{n^4}\cos^2\beta\sin(\chi + B)\cos(\chi + B)$$

$$\lambda'' = \frac{4e^2}{n^4}\sin^2\beta - \frac{4e^2}{n^4}\cos^2\beta\cos^2(\chi + B)$$

$$\mu = -\frac{16e^2}{n^5}\sin\beta\cos\beta\sin(\chi + B)$$

$$\mu' = -\frac{16e^2}{3n^5}\sin\beta\cos\beta\cos(\chi + B)$$

$$\mu'' = -\frac{16e^2}{3n^5}\sin\beta\cos\beta\sin(\chi + B).$$

$$\mu''' = -\frac{16e^2}{n^5}\sin\beta\cos\beta\cos(\chi + B)$$

Es ist ferner strenge

$$\eta = \frac{1 - e^2}{n^2(1 - e^2\cos^2\beta)^2}$$

also wenn man hier die mit e^4 multiplicirten Glieder mit aufnimmt.

$$\eta = \frac{1}{n^2}\left\{1 + \left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\cos 2\beta + \frac{e^4}{4}(3\cos^2 2\beta - 1)\right\}$$

Bezeichnet man nun, den übrigen Bezeichnungen analog, die reducirten Breiten, die den Dreieckspunkten A, B, C zukommen mit α', β', γ', so erhält man für die Krümmungsmaasse α, β, γ die folgenden Ausdrücke,

$$\alpha = \frac{1}{n^2}\left\{1 + \left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\cos 2\alpha' + \frac{e^4}{4}(3\cos^2 2\alpha' - 1)\right\}$$

$$\beta = \frac{1}{n^2}\left\{1 + \left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\cos 2\beta' + \frac{e^4}{4}(3\cos^2 2\beta' - 1)\right\}$$

$$\gamma = \frac{1}{n^2}\left\{1 + \left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\cos 2\gamma' + \frac{e^4}{4}(3\cos^2 2\gamma' - 1)\right\}$$

und hieraus

$$\alpha^2 = \frac{1}{n^4} 1 + 2e^2 \cos 2\alpha')$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{n^4}(1 + e^2 \cos 2\alpha' + e^2 \cos 2\beta')$$

$$\alpha\gamma = \frac{1}{n^4}(1 + e^2 \cos 2\alpha' + e^2 \cos 2\gamma')$$

Durch die vorstehenden Werthe gehen ferner die (131) in die folgenden über,

$$A = \frac{4e^2}{n^4}\{\sin^2\alpha' - \cos^2\alpha' \cos^2\chi\}$$

$$A' = \frac{4e^2}{n^4}\{\sin^2\alpha' \cos B - \cos^2\alpha' \cos\chi \cos(\chi + B)\}$$

$$A'' = \frac{4e^2}{n^4}\{\sin^2\alpha' - \cos^2\alpha' \cos^2(\chi + B)\}$$

$$M = -\frac{16e^2}{n^5} \sin\alpha' \cos\alpha' \cos\chi$$

$$M' = -\frac{16e^2}{8n^5} \sin\alpha' \cos\alpha' \{\cos(\chi + B) + 2\cos B \cos\chi\}$$

$$M'' = -\frac{16e^2}{8n^5} \sin\alpha' \cos\alpha' \{\cos\chi + 2\cos B \cos(\chi + B)\}$$

$$M''' = -\frac{16e^2}{n^5} \sin\alpha' \cos\alpha' \cos(\chi + B)$$

womit alle Hülfsgrössen für das Revolutionsellipsoid entwickelt sind.

136.

Suchen wir nun zuerst den Ausdruck der Fläche des sphäroidischen Dreiecks auf dem Revolutionsellipsoid. Substituiren wir zu dem Ende sowohl den Ausdruck (133) für $\cos B$, indem wir darin den Kugelhalbmesser $r = n$ machen, wie die vorstehenden Ausdrücke für die Krümmungsmaasse α, β, γ, wobei die mit e^4 multiplicirten Glieder weggelassen werden müssen, in den letzten Ausdruck für Δ des Art. 121, so erhalten wir den Ausdruck für die gesuchte Fläche, aus welchem man durch blose Vertauschung der Buchstaben noch zwei andere ähnliche bekommen kann. Diese drei Ausdrücke sind

$$\begin{aligned}\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A \Big\{1 &+ \frac{1}{24n^2}(3a^2 - b^2 - c^2) \\ &+ \frac{1}{1440n^4}(15a^4 - 3b^4 - 3c^4 + 10b^2c^2) \\ &+ \frac{e^2}{40n^2}(2a^2 - b^2 - c^2)\cos 2\alpha' \\ &+ \frac{e^2}{240n^2}(9a^2 - 3b^2 - c^2)\cos 2\beta' \\ &+ \frac{e^2}{240n^2}(9a^2 - b^2 - 3c^2)\cos 2\gamma'\Big\}\end{aligned}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ac\sin B\Big\{1 - \tfrac{1}{24n^2}(a^2 - 3b^2 + c^2)$$
$$- \tfrac{1}{1440n^4}(3a^4 - 15b^4 + 3c^4 - 10a^2c^2)$$
$$- \tfrac{e^2}{240n^2}(3a^2 - 9b^2 + c^2)\cos 2\alpha'$$
$$- \tfrac{e^2}{40n^2}(a^2 - 2b^2 + c^2)\cos 2\beta'$$
$$- \tfrac{e^2}{240n^2}(a^2 - 9b^2 + 3c^2)\cos 2\gamma'\Big\}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ab\sin C\Big\{1 - \tfrac{1}{24n^2}(a^2 + b^2 - 3c^2)$$
$$- \tfrac{1}{1440n^4}(3a^4 + 3b^4 - 15c^4 - 10a^2b^2)$$
$$- \tfrac{e^2}{240n^2}(3a^2 + b^2 - 9c^2)\cos 2\alpha'$$
$$- \tfrac{e^2}{240n^2}(a^2 + 3b^2 - 9c^2)\cos 2\beta'$$
$$- \tfrac{e^2}{40n^2}(a^2 + b^2 - 2c^2)\cos 2\gamma'\Big\}$$

Jeder dieser Ausdrücke ist bis auf Grössen achter Ordnung richtig, und man sieht, dass die Function, die im Art. 121 mit l bezeichnet wurde, hiezu nichts beigetragen hat.

137.

Für die Summe der Winkel unsers sphäroidischen Dreiecks giebt der letzte Ausdruck des Art. 122, wenn die im Vorstehenden für das Revolutionsellipsoid entwickelten Functionen substituirt werden, zuerst den folgenden Ausdruck

$$A + B + C = 180^0 + \frac{\Delta}{n^2} + \frac{\Delta\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)}{3n^2}\{\cos 2\alpha' + \cos 2\beta' + \cos 2\gamma'\}$$
$$+ \frac{\Delta e^4}{4n^2}\{\cos^2 2\alpha' + \cos^2 2\beta' + \cos^2 2\gamma' - 1\}$$
$$- \frac{\Delta e^2}{180n^4}\{6a^2 + 2ac\cos B - 2c^2\}\cos 2\alpha'$$
$$+ \frac{\Delta e^2}{180n^4}\{4a^2 - ac\cos B - c^2\}\cos 2\beta'$$
$$+ \frac{\Delta e^2}{180n^4}\{2a^2 + 3ac\cos B - c^2\}\cos 2\gamma'$$
$$- \frac{\Delta e^2}{8n^4}\{a^2 - ac\cos B + c^2\}\sin^2\alpha'$$
$$+ \frac{\Delta e^2}{8n^4}\{c^2\cos^2\chi - ac\cos\chi\cos(\chi + B) + a^2\cos^2(\chi + B)\}\cos^2\alpha'$$
$$+ \frac{4\Delta e^2}{45n^5}\{8c^3\cos\chi - 4ac^2\cos(\chi + B) - 8ac^2\cos B\cos\chi$$
$$+ 6a^2c\cos\chi + 12a^2c\cos B\cos(\chi + B) - 7a^3\cos(\chi + B)\}\sin\alpha'\cos\alpha'$$

welcher auch bis auf Grössen achter Ordnung richtig ist. Dieser kann noch dadurch vereinfacht werden, dass man durch die folgenden Gleichungen,

$$2ac \cos B = a^2 - b^2 + c^2$$
$$a \sin B = b \sin A$$
$$a \cos B = c - b \cos A$$

die hier zulässig sind, B eliminirt. Man erleichtert sich diese Elimination durch die folgende Gleichung,

$$a \cos(\chi + B) = c \cos \chi - b \cos \chi'$$

die in Verbindung mit $\chi' = \chi - A$, die aus dem Art. 130 folgt, aus den vorstehenden leicht erhalten wird. Man bekommt durch Hülfe dieser Gleichungen statt des vorstehenden Ausdrucks für die Summe der drei Winkel den folgenden,

$$\begin{aligned} A + B + C = 180^0 &+ \frac{\Delta}{n^2} + \frac{\Delta\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)}{8n^2}\{\cos 2\alpha' + \cos 2\beta' + \cos 2\gamma'\} \\ &+ \frac{\Delta e^4}{4n^2}\{\cos^2 2\alpha' + \cos^2 2\beta' + \cos^2 2\gamma' - 1\} \\ &- \frac{\Delta e^2}{180 n^4}\{7a^2 - b^2 - c^2\} \cos 2\alpha' \\ &+ \frac{\Delta e^2}{360 n^4}\{7a^2 + b^2 - 3c^2)\} \cos 2\beta' \\ &+ \frac{\Delta e^2}{360 n^4}\{7a^2 - 3b^2 + c^2\} \cos 2\gamma' \\ &- \frac{\Delta e^2}{6n^4}\{a^2 + b^2 + c^2\} \sin^2 \alpha' \\ &+ \frac{\Delta e^2}{8n^4}\{b^2 \cos^2 \chi' + c^2 \cos^2 \chi - bc \cos \chi' \cos \chi\} \cos^2 \alpha' \\ &+ \frac{4\Delta e^2}{45n^3}\{(a^2 + 6b^2 - 2c^2) b \cos \chi' + (a^2 - 2b^2 + 6c^2) c \cos \chi\} \sin \alpha' \cos \alpha' \end{aligned}$$

ebenfalls bis auf Grössen achter Ordnung richtig.

Man kann aus dem vorstehenden Ausdruck einen andern ableiten, welcher die Fläche des sphäroidischen Dreiecks auf dem Revolutionsellipsoid durch den Ueberschuss der Summe der Winkel desselben über 180^0 giebt; diesen Ausdruck will ich nur kurz andeuten. Multiplicirt man den vorstehenden Ausdruck mit $\frac{n^2}{\Delta}$, bezeichnet hierauf die rechte Seite desselben mit Weglassung des ersten Gliedes mit $1 + x$, und setzt ausserdem

$$\Delta_0 = A + B + C - 180^0$$

so bekommt man

$$\Delta = n^2\Delta_0(1 - x + x^2)$$

welcher auch bis auf Grössen achter Ordnung vollständig ist.

138.

Wenden wir uns nun zur Reduction des shpäroidischen Dreiecks auf dem Revolutionsellipsoid auf das sphärische von denselben Seiten auf der Kugel, deren Halbmesser $r = n$ ist, so sind dieselben im vor. Art. ausgeführten Reductionen mit den Ausdrücken des Art. 128 vorzunehmen. Da sie keine besonderen Umstände darbieten, so werde ich das Resultat derselben ohne Weiteres ansetzen. Man bekommt

$$\begin{aligned}
\delta A = &- \frac{\Delta\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)}{12n^2}\{2\cos 2\alpha' + \cos 2\beta' + \cos 2\gamma'\} \\
&- \frac{\Delta e^4}{16n^2}\left\{2\cos^2 2\alpha' + \cos^2 2\beta' + \cos^2 2\gamma' - \frac{4}{3}\right\} \\
&+ \frac{\Delta e^2}{2160\,n^4}\{29a^2 - 27b^2 - 27c^2\}\cos 2\alpha' \\
&- \frac{\Delta e^2}{4320n^4}\{11a^2 + 23b^2 + 31c^2\}\cos 2\beta' \\
&- \frac{\Delta e^2}{4320n^4}\{11a^2 + 31b^2 + 23c^2\}\cos 2\gamma' \\
&+ \frac{\Delta e^2}{30n^4}\{a^2 + 2b^2 + 2c^2\}\sin^2\alpha' \\
&- \frac{\Delta e^2}{30n^4}\{3b^2\cos^2\chi' + 3c^2\cos^2\chi - 2bc\cos\chi'\cos\chi\}\cos^2\alpha' \\
&- \frac{2\Delta e^2}{135n^5}\{(a^2 + 11b^2 - 2c^2)b\cos\chi' + (a^2 - 2b^2 + 11c^2)c\cos\chi\}\sin\alpha'\cos\alpha'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta B = &- \frac{\Delta\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)}{12n^2}\{\cos 2\alpha' + 2\cos 2\beta' + \cos 2\gamma'\} \\
&- \frac{\Delta e^4}{16n^2}\left\{\cos^2 2\alpha' + 2\cos^2 2\beta' + \cos^2 2\gamma' - \frac{4}{3}\right\} \\
&+ \frac{\Delta e^2}{4320n^4}\{37a^2 + b^2 - 43c^2\}\cos 2\alpha' \\
&- \frac{\Delta e^2}{2160n^4}\{39a^2 - 5b^2 + 15c^2\}\cos 2\beta' \\
&- \frac{\Delta e^2}{4320n^4}\{67a^2 - 25b^2 + 35c^2\}\cos 2\gamma' \\
&+ \frac{\Delta e^2}{30n^4}\{+2a^2\ b^2 + 2c^2\}\sin^2\alpha' \\
&- \frac{\Delta e^2}{30n^4}\{3b^2\cos^2\chi' + 4c^2\cos^2\chi - 4bc\cos\chi'\cos\chi\}\cos^2\alpha' \\
&- \frac{2\Delta e^2}{135n^5}\{(2a^2 + 10b^2 - 5c^2)b\cos\chi' + (3a^2 - 5b^2 + 15c^2)c\cos\chi\}\sin\alpha'\cos\alpha'
\end{aligned}$$

$$\delta C = -\frac{\Delta\left(e^2+\frac{1}{2}e^4\right)}{12n^2}\{\cos 2\alpha' + \cos 2\beta' + 2\cos 2\gamma'\}$$
$$-\frac{\Delta e^4}{16n^2}\left\{\cos^2 2\alpha' + \cos^2 2\beta' + 2\cos^2 2\gamma' - \frac{4}{3}\right\}$$
$$+\frac{\Delta e^2}{4320n^4}\{37a^2 - 43b^2 + c^2\}\cos 2\alpha'$$
$$-\frac{\Delta e^2}{4320n^4}\{67a^2 + 35b^2 - 25c^2\}\cos 2\beta'$$
$$-\frac{\Delta e^2}{2160n^4}\{39a^2 + 15b^2 - 5c^2\}\cos 2\gamma'$$
$$+\frac{\Delta e^2}{30n^4}\{2a^2 + 2b^2 + c^2\}\sin^2\alpha'$$
$$-\frac{\Delta e^2}{30n^4}\{4b^2\cos^2\chi' + 3c^2\cos^2\chi - 4bc\cos\chi'\cos\chi\}\cos^2\alpha'$$
$$-\frac{2\Delta e^2}{135n^5}\{(3a^2+15b^2-5c^2)b\cos\chi' + (2a^2-5b^2+10c^2)c\cos\chi\}\sin\alpha'\cos\alpha'$$

die auch bis auf Grössen achter Ordnung richtig sind. Lässt man die Glieder sechster und siebenter Ordnung weg, und vergleicht sie mit den (112), so findet man vollständige Uebereinstimmung, indem hier A, B, C, α', β', γ' bez. dasselbe bedeuten, was dort n, n', n'', β, β', β''.

Bei der Anwendung dieser Ausdrücke ist zu bemerken, dass es gleichgültig ist, welche Ecke des sphäroidischen Dreiecks entweder mit A, oder mit B oder mit C bezeichnet wird. Die Azimuthe χ und χ' müssen aber immer dem Dreieckspunkt angehören, welcher mit A bezeichnet worden ist, und vom Südpunkt des Horizonts gezählt werden; einerlei nach welcher Richtung. Es ist endlich χ immer das Azimuth der mit c, und χ' das der mit b bezeichneten Dreiecksseite.

139.

Die Anwendung endlich des Ausdrucks des Art. 129 auf das Revolutionsellipsoid giebt für die Fläche Δ' des sphärischen Dreiecks, auf welches das sphäroidische Dreieck im Vorhergehenden reducirt worden ist, den Ausdruck

$$\Delta' = \Delta - \frac{\Delta\sigma^2}{120\,n^2}(a^2 + 2b^2 + 2c^2)\cos 2\alpha'$$
$$- \frac{\Delta\sigma^2}{120\,n^2}(2a^2 + b^2 + 2c^2)\cos 2\beta'$$
$$- \frac{\Delta\sigma^2}{120\,n^2}(2a^2 + 2b^2 + c^2)\cos 2\gamma'$$

welcher auch bis auf Grössen achter Ordnung richtig ist.

140.

Es soll jetzt die Anwendung unserer Ausdrücke durch Beispiele erläutert werden. Nehmen wir zuerst das sphäroidische Dreieck des Art. 77 vor, und betrachten es als ein sphärisches von denselben Seiten. Die betreffenden Formeln der sphärischen Trigonometrie geben unter dieser Voraussetzung, und wenn man A statt n, B statt n', C statt n'' schreibt,

$$\begin{aligned} A + \delta A &= 60^0\,30'\;\;0'',29 \\ B + \delta B &= 69\;\;59\;\;59,51 \\ C + \delta C &= 49\;\;36\;\;53,66 \\ \hline \Delta' &= 0^0\;\;6'\,53'',46 \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Winkel mit den sphäroidischen des Art. 77 giebt

$$\begin{aligned} \delta A &= -\,0'',52 \\ \delta B &= -\,0,49 \\ \delta C &= -\,0,51 \end{aligned}$$

und die Ausdrücke des Art. 138 geben

$$\begin{aligned} \delta A &= -\,0'',51 \\ \delta B &= -\,0,50 \\ \delta C &= -\,0,53 \end{aligned}$$

welches für eine vollständige Uebereinstimmung gehalten werden muss, da die directe Berechnung der sphärischen Winkel aus den Seiten bei einem so kleinen Dreieck, wie das hier in Rede stehende, von dem Umstande stark beeinflusst wird, dass eine kleine Aenderung der Seiten eine grosse der Winkel verursacht. Die Glieder sechster und siebenter Ordnung sind hier unbedeutend, und ihre Summen sind bez. nur

$$-\,0'',002\;;\quad -\,0'',002\;;\quad -\,0'',003$$

Bei Dreiecken von der Grösse des hier in Rede stehenden, und bei noch grösseren, kann man sich also ohne Nachtheil der Ausdrücke (112) bedienen, in so ferne man die Genauigkeit nicht über die zweite Decimale der Secunde ausdehnen will.

141.

Zum zweiten Beispiel soll das sphäroidische Dreieck des Art. 76 dienen, welches ich ausführlicher behandeln werde. Schreibt man A statt n, B statt n'', C statt n', so werden in den hier eingeführten Bezeichnungen

$$\begin{array}{llll} A = 78^0 & , & a = 20^0\, 2'\, 24'',41 \\ B = 47\;\; 37'\, 39'',59 & , & b = 15 \\ C = 56\;\; 34\;\; 12,35 & , & c = 17 \\ \alpha' = 45^0 & , & \chi' = \;\; 30^0 \\ \beta' = 47\;\; 44' & , & \chi = 108 \\ \gamma' = 31\;\; 36 & , & \end{array}$$

und durch die sphärische Trigonometrie bekommt man vor Allem

$$\begin{array}{l} A + \delta A = 77^0\, 59'\, 58'',57 \\ B + \delta B = 47\;\; 37\;\; 38,65 \\ C + \delta C = 56\;\; 34\;\;\; 8,84 \\ \hline \Delta' = \;\; 2^0\, 11'\, 46'',06 \end{array}$$

Die Vergleichung dieser Winkel mit den sphäroidischen giebt

$$\begin{array}{l} \delta A = -\, 1'',43 \\ \delta B = -\, 0,94 \\ \delta C = -\, 3,51 \end{array}$$

Da die Dreiecksseiten hier in Bogentheilen des Aequators angegeben sind, während die im Vorhergehenden abgeleiteten Ausdrücke in der Voraussetzung construirt worden sind, dass diese Seiten in irgend einem Linearmaasse ausgedrückt seien, so muss man in allen diesen Ausdrücken $n=1$ setzen und die Seiten vor ihrer Anwendung in Theile des Kreishalbmessers $=1$ verwandeln. Die Dreiecksfläche wird auf jeden Fall in Bogentheilen ausgedrückt, und man kann unbedenklich Δ' statt Δ anwenden. Aus den oben angegebenen Dreiecksseiten folgt

$$\log a = 9.5437776\ ,\quad a^2 = 0.122336$$
$$\log b = 9.4179687\ ,\quad b^2 = 0.068539$$
$$\log c = 9.4723263\ ,\quad c^2 = 0.088034$$

Es wurde nun zuerst die Fläche des sphäroidischen Dreiecks durch den ersten Ausdruck des Art. 136 berechnet. Zur leichteren Vergleichung werde ich den Betrag jedes einzelnen Gliedes dieses Ausdrucks der Reihe nach anführen. Die Fläche werde ich in Bogentheilen ausdrücken. So fand sich

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2} bc \sin A = & 2^0\, 10'\, 36'',002 \\ & 1\quad 8,707 \\ & 1,346 \\ & 0 \\ & -\ 0,017 \\ & 0,076 \\ \hline \Delta = & 2^0\, 11'\, 46'',114 \end{array}$$

Man sieht dass diese Fläche sehr wenig von der Fläche Δ' des sphärischen Dreiecks verschieden ist. Die Endformel des Art. 137 gab hierauf, wenn wieder die Glieder der Reihe nach angeführt werden,

$$\begin{array}{rl} & 180^0 \\ & 2\quad 11'\, 46'',114 \\ & \left\{ \begin{array}{r} +\ 6,256 \\ +\ 0,021 \end{array} \right\} \\ & -\ 0,068 \\ & 0 \\ & -\ 0,008 \\ & +\ 0,049 \\ & -\ 1,227 \\ & +\ 0,709 \\ & +\ 0,080 \\ \hline A + B + C = & 182^0\, 11'\, 51'',926 \end{array}$$

Die oben angeführten Werthe dieser drei Winkel geben ihre Summe

$$A + B + C = 182^0\, 11'\, 51'',94$$

nur 0'',01 vom vorstehenden Resultat verschieden. Aus den Ausdrücken des Art. 138 bekam ich in ähnlicher Aufstellung

$\left\{\begin{matrix} -1'',564 \\ -0,005 \end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix} -1'',145 \\ -0,004 \end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix} -3'',547 \\ -0,012 \end{matrix}\right.$
$+0,025$	$+0,025$	$+0,020$
0	0	0
$+0,007$	$+0,013$	$+0,010$
$-0,030$	$-0,053$	$-0,059$
$+0,383$	$+0,430$	$+0,413$
$-0,195$	$-0,239$	$-0,276$
$-0,028$	$+0,005$	$-0,057$
$\delta A = -1'',407$	$\delta B = -0'',968$	$\delta C = -3'',508$

Vergleicht man diese mit den oben durch strenge Rechnung erhaltenen Werthen derselben, so findet man die Unterschiede

$$+0'',02 \;;\quad -0'',03 \;;\quad 0'',00$$

die befriedigend sind. Hier haben die Glieder der sechsten und der siebenten Ordnung wesentlichen Einfluss, denn lässt man diese weg, so bleibt blos das erste Glied eines jeden der vorstehenden Ausdrücke übrig, und man erhält die folgenden Unterschiede von den strenge berechneten Werthen

$$-0'',14 \;;\quad -0'',22 \;;\quad -0'',05$$

die nicht unerheblich sind. Rechnet man endlich noch Δ' durch den Ausdruck des Art. 139, so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^{0}\,11'\,46'',114 \\ &\phantom{= 2^{0}\,11'\,4}0 \\ &\phantom{= 2^{0}\,1}+0,020 \\ &\phantom{= 2^{0}\,1}-0,093 \\ \Delta' &= 2^{0}\,11'\,46'',04 \end{aligned}$$

nur $0'',02$ von dem oben erhaltenen Werthe verschieden.

Man reicht also bei Dreiecken von der Grösse des jetzt betrachteten mit den Ausdrücken (112) nicht aus, sondern muss für solche die Glieder sechster und siebenter Ordnung mit in Betracht ziehen, mit anderen Worten, die Ausdrücke des Art. 138 anwenden, und dasselbe findet bei weit kleineren Dreiecken statt, wenn man die Genauigkeit weiter wie bis auf Hunderttheile von Secunden treiben will.

Da das hier gewählte Dreieck ziemlich gross ist, so ist es von Interesse auch die Resultate der Ausdrücke des Art. 138 kennen zu lernen,

wenn nach einander die beiden anderen Dreiecksecken als der Punkt A betrachtet werden, und ich habe daher die Rechnungen auch in dieser Annahme ausgeführt. Sei $A = n'$, dann wird

$a = 17^0$,		$\alpha' = 31^0\,36'$,	$a^2 = 0.0880$
$b = 15$,	$\chi' = 204^0\,32'$,	$\beta' = 47\ 44$,	$b^2 = 0.0685$
$c = 20\ 2'$,	$\chi = 147\ 58$,	$\gamma' = 45$,	$c^2 = 0.1223$

Schreibt man nun wieder die einzelnen Glieder, und die Winkeländerungen in derselben Reihenfolge hin, wie oben, so entstehen

$\left\{\begin{matrix}-1'',564\\-0,005\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}-1'',145\\-0,004\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}-3'',547\\-0,012\end{matrix}\right\}$
+ 0, 025	+ 0, 025	+ 0, 020
+ 0, 002	− 0, 011	− 0, 029
+ 0, 006	+ 0, 012	+ 0, 007
0	0	0
+ 0, 210	+ 0, 236	+ 0, 227
− 0, 266	− 0, 305	− 0, 374
+ 0, 166	+ 0, 203	+ 0, 184
$\delta C = -1'',426$	$\delta B = -0'',989$	$\delta A = -3'',524$

Sei jetzt $A = n''$, dann bekommt man

$a = 15^0$,		$\alpha' = 47^0\,44'$,	$a^2 = 0,0685$
$b = 17$,	$\chi' = 270^0\,10'$,	$\beta' = 31\ 36$,	$b^2 = 0.0880$
$c = 20\ 2'$,	$\chi = 317\ 47$,	$\gamma' = 45$,	$c^2 = 0,1223$

und hiemit

$\left\{\begin{matrix}-1'',564\\-0,005\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}-1'',145\\-0,004\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}-3'',547\\-0,012\end{matrix}\right\}$
+ 0, 025	+ 0, 025	+ 0, 020
+ 0, 001	+ 0, 009	+ 0, 003
− 0, 025	− 0, 036	− 0, 045
0	0	0
+ 0, 419	+ 0, 471	+ 0, 452
− 0, 159	− 0, 160	− 0, 213
− 0, 093	− 0, 125	− 0, 161
$\delta C = -1'',401$	$\delta A = -0'',965$	$\delta B = -3'',503$

Vergleicht man diese drei Werthe einer jeden Winkeländerung mit einander, so zeigen sich in den letzten Stellen kleine Verschiedenheiten,

die bis auf 0″,02 gehen, und keinen anderen Grund haben, als dass bei einem sphäroidischen Dreieck von der Grösse des hier als Beispiel gewählten die Glieder achter und neunter Ordnung, die hier übergangen worden sind, anfangen merklich zu werden; dieses kann nicht unerwartet kommen, da 20° in Theilen des Kreishalbmessers ausgedrückt grösser wie $\frac{1}{3}$ sind. Diese Verschiedenheiten sind indess nicht so gross, dass man nicht, bei der Genauigkeit, die man in den gewöhnlichen Fällen erreichen will, das im Vorhergehenden entwickelte Verfahren bis auf Dreiecke von der Grösse des hier behandelten sollte anwenden können.

142.

Um die Prüfung der Anwendbarkeit unsers Verfahrens noch umfassender auszuführen, habe ich mich mit den zwei im Vorhergehenden aufgestellten Dreiecken nicht begnügt, sondern noch einige in verschiedenen Lagen auf dem Ellipsoid berechnet. Das im vor. Art. behandelte Dreieck liegt nahe in der Mitte zwischen dem Pol und dem Aequator, die Cosinusse der doppelten Breiten werden daher klein, und daraus folgt, dass die Winkeländerungen auch klein werden müssen. Anders verhält sich dieser Umstand bei Dreiecken, die nahe am Pol oder am Aequator liegen, hier werden unter sonst gleichen Umständen die Winkeländerungen möglichst gross, und deshalb habe ich noch zwei Dreiecke von nahe derselben Grösse, wie das vorhergehende berechnet, von welchen das eine an den Pol, und das andere an den Aequator reicht. Für das an den Pol reichende Dreieck habe ich durch Anwendung der Hauptaufgabe des ersten Abschnittes, und indem ich

$$\beta' = 70^\circ, \quad \alpha' = 120^\circ, \quad \sigma = 18^\circ$$

als gegeben betrachtete, die folgenden Stücke erhalten, welche in der zu Anfang dieses Abschnittes eingeführten Bezeichnungsart ausgedrückt sind

$\beta = 90^\circ$	$\beta' = 70^\circ$	$\beta'' = 71^\circ 10' 45'',62$
$\alpha' = \ldots$	$\alpha_, = 120$	$\alpha_{,,} = 246\ 39\ 19,88$
$\alpha'' = \ldots$	$\alpha_,'' = 180$	$\alpha_{,,}' = 180$
$n = 56\ 3'\ 37'',31$;	$n' = 60$	$n'' = 66\ 39\ 19,88$
$\sigma = 18$	$\sigma' = 18\ 49'\ 6'',420$;	$\sigma'' = 19\ 59\ 50.476$

Geht man nun zu den in unserer jetzt vorliegenden Aufgabe eingeführten Bezeichnungen über, und setzt zuerst $A = n$, so bekommt man

$a = 18^0$;	$\alpha' = 90^0$;	$\log a = 9.49715$;	$a^2 = 0.0987$
$b = 19\ 59'\ 50''$;	$\beta' = 71\ 11'$;	$\log b = 9.54284$;	$b^2 = 0.1218$
$c = 18\ 49\ \ 6$;	$\gamma' = 70$	$\log c = 9.51646$;	$c^2 = 0.1079$

In diesem Falle sind die Azimuthe, die in unsern Ausdrücken vorkommen, der Natur der Sache zufolge unbestimmt, aber zugleich werden die Glieder der Ausdrücke des Art. 138, die die Azimuthe enthalten gleich Null, und diese Ausdrücke bleiben also demungeachtet bestimmt. Sie geben

$\left\{\begin{matrix} +19'',467 \\ +0,065 \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} +18'',328 \\ +0,061 \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} +18'',187 \\ +0,061 \end{matrix}\right\}$
$-0,052$	$-0,041$	$-0,040$
$+0,102$	$+0,013$	$+0,023$
$+0,087$	$+0,102$	$+0,099$
$+0,086$	$+0,086$	$+0,109$
$+1,221$	$+1,171$	$+1,201$
0	0	0
0	0	0
$\delta A = +20'',976$;	$\delta B = +19'',720$;	$\delta C = +19'',640$

Setzt man hierauf $A = n'$, womit

$a = 18^0\,49'\ \ 6''$;		$\alpha' = 70^0$	$a^2 = 0.1079$
$b = 18$;	$\chi' = 120^0$;	$\beta' = 90$	$b^2 = 0.0987$
$c = 19\ 59\ 50$;	$\chi = 180$;	$\gamma' = 71\ 11'$;	$c^2 = 0.1218$

wird, so ergiebt sich, wenn man die drei ersten Glieder, die immer dieselben Werthe bekommen, in Ein Glied zusammen zieht,

$+19'',480$	$+18'',348$	$+18'',208$
$+0,013$	$+0,002$	$+0,066$
$+0,169$	$+0,116$	$+0,110$
$+0,109$	$+0,123$	$+0,085$
$+1,079$	$+1,034$	$+1,061$
$-0,088$	$-0,063$	$-0,085$
$+0,210$	$+0,162$	$+0,183$
$\delta B = +20'',972$;	$\delta C = +19'',722$;	$\delta A = -19'',628$

Sei endlich $A = n''$, womit

$a = 19^0\,59'\,50''$;		$\alpha' = 71^0\,11'$; $a^2 = 0.1218$
$b = 18$;	$\chi' = 246^0\,39'$;	$\beta' = 90$; $b^2 = 0.0987$
$c = 18\;\;49\;\;\;6$;	$\chi = 180$;	$\gamma' = 70$; $c^2 = 0.1079$

wird, so erhält man

$+\,19''\,480$	$+\,18'',348$	$+\,18'',208$
$0,\,000$	$+\,0,\,049$	$-\,0,\,004$
$+\,0,\,179$	$+\,0,\,106$	$+\,0,\,136$
$+\,0,\,111$	$+\,0,\,080$	$+\,0,\,132$
$+\,1,\,094$	$+\,1,\,049$	$+\,1,\,076$
$-\,0,\,072$	$-\,0,\,066$	$-\,0,\,051$
$+\,0,\,169$	$+\,0,\,142$	$+\,0,\,125$
$\delta B = +\,20'',960$;	$\delta A = +\,19'',708$;	$\delta C = +\,19'',622$

Hier weichen die Resultate der drei verschiedenen Berechnungsarten wieder höchstens 0",02 von einander ab, obgleich die Winkeländerungen weit grösser sind, wie im vorhergehenden Beispiel. Rechnet man aus den oben gegebenen Seiten die Winkel des sphärischen Dreiecks, so findet man

$$A + \delta A = 56^0\;\;3'\;58'',23\;;\qquad \delta A = +\,20'',92$$
$$B + \delta B = 66\;\;39\;\;39,\,57\;;\qquad \delta B = +\,19,\,69$$
$$C + \delta C = 60\;\;\;0\;\;19,\,58\;;\qquad \delta C = +\,19,\,58$$

Die Abweichung dieser Winkeländerungen von den oben berechneten sind etwas grösser wie im vorigen Beispiel, und zwar bezüglich

$$+\,0'',06\;;\quad +\,0'',03\;;\quad +\,0'',06$$
$$+\,0,\,05\;;\quad +\,0,\,03\;;\quad +\,0,\,05$$
$$+\,0,\,04\;;\quad +\,0,\,02\;;\quad +\,0,\,04$$

welches aber nicht unerwartet ist, da hier der Betrag aller Glieder der Winkeländerungen grösser ist wie im vorigen Beispiel. Uebrigens sind die strengen Rechnungen hier nicht mit Logarithmen von so vielen Decimalen ausgeführt worden, dass die Winkel des sphärischen Dreiecks bis auf 0",005 verbürgt werden könnten.

143.

Für das am Aequator liegende Dreieck habe ich ein gleichschenkliches gewählt, und die folgenden Stücke gefunden,

$\beta = 15^\circ 14' 30'',05$;	$\beta' = 0$;	$\beta'' = 0$
$\alpha' = 33\ 18\ 53,21$;	$\alpha_{,} = 90^\circ$;	$\alpha_{,,} = 270^\circ$
$\alpha'' = -33\ 18\ 53,21$;	$\alpha_{,}'' = 148$;	$\alpha_{,,}' = 212$
$n = 66\ 37\ 46,42$;	$n' = 58$;	$n'' = 58$
$\sigma = 19\ 32\ 31,42$;	$\sigma' = 18$;	$\sigma'' = 18$

Durch die Annahme $A=n$ gaben nun die Ausdrücke des Art. 138

$\left\{\begin{matrix} -19'',475 \\ -0,065 \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} -20'',199 \\ -0,067 \end{matrix}\right\}$
$-0,056$	$-0,057$
$-0,049$	$+0,002$
$-0,096$	$-0,160$
$-0,096$	$-0,128$
$+0,074$	$+0,076$
$-0,537$	$-0,403$
$-0,124$	$-0,128$
$\delta A = -20'',424$;	$\delta B = \delta C = -21'',064$

und durch die Annahme $A=n'$ fand sich, wenn wieder die drei ersten Glieder in Ein Glied zusammen gezogen werden,

$-19'',596$	$-20'',323$	$-20'',323$
$-0,007$	$-0,085$	$-0,018$
$-0,104$	$-0,093$	$-0,148$
$-0,119$	$-0,085$	$-0,103$
0	0	0
$-0,594$	$-0,446$	$-0,446$
0	0	0
$\delta C = -29'',420$;	$\delta A = -21'',032$;	$\delta B = -21'',038$

Die Annahme $A=n''$ ist hier nicht nöthig durchzuführen, da sie dasselbe Resultat geben muss wie die vorhergehende. Aus der strengen Berechnung des sphärischen Dreiecks ergab sich

$$A+\delta A = 66^\circ\ 37'\ 26'',04\ ;\qquad \delta A = -20'',38$$
$$B+\delta B = 57\ \ 59\ \ 38,96\ ;\qquad \delta B = -21,04$$
$$C+\delta C = 57\ \ 59\ \ 38,96\ ;\qquad \delta C = -21,04$$

und die Vergleichung dieser Werthe der Winkeländerungen mit den oben erhaltenen giebt bezüglich

$-0'',04$;	$-0'',02$;	$-0'',02$
$-0,04$;	$+0,01$;	$+0,01$

Die Umstände sind hier nahe dieselben wie im nächst vorhergehenden Beispiel.

144.

Es wurde oben gesagt, dass die kleinen Verschiedenheiten, die die verschiedenen Berechnungsarten gegeben haben, Folge der hier übergangenen Glieder achter und höherer Ordnungen scien. Demzufolge müssen sie geringer werden, wenn die Dimensionen des Dreiecks kleiner sind, und um darzuthun, dass dieses in der That statt findet, habe ich ausser den drei vorhergehenden Dreiecken von nahe gleicher Grösse ein etwas kleineres sphäroidisches Dreieck, und zwar das folgende, berechnet.

$\beta = 54^0\,42'\,10'',20$;	$\beta' = 38^0\,36'\;\;2'',64$;	$\beta'' = 50^0$
$\alpha' = 285\;\;32\;\;55,97$;	$\alpha_{,} = 211\;\;55\;\;\;0,55$;	$\alpha_{''} = 40$
$\alpha'' = 341\;\;33\;\;25,81$;	$\alpha_{,}'' = 166\;\;28\;\;23,15$;	$\alpha_{''}' = 120$
$n = 56\;\;\;0\;\;29,84$;	$n' = 45\;\;26\;\;37,40$;	$n'' = 80$
$\sigma = 14$;	$\sigma' = 12$;	$\sigma'' = 16\;\;41'57'',264$

Nimmt man nun zuerst $A = n$ an, so bekommt man auf dieselbe Art wie vorher

$\left\{\begin{matrix}+1'',794\\+0.006\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}+0'',182\\+0.001\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}+1'',332\\+0.004\end{matrix}\right\}$
$+0.015$	$+0.016$	$+0.016$
$+0.009$	$+0.004$	-0.001
-0.008	-0.012	-0.006
$+0.006$	$+0.008$	$+0.007$
$+0.246$	$+0.258$	$+0.227$
-0.081	-0.098	-0.070
-0.066	-0.086	-0.057
$\delta A = +1'',921$;	$\delta B = +0'',273$;	$\delta C = +1'',452$

Die Annahme $A = n'$ giebt

+ 1″,815	+ 0″,199	+ 1″,352
— 0. 004	— 0. 009	— 0. 002
+ 0. 014	+ 0. 012	+ 0, 008
+ 0. 006	+ 0. 006	+ 0. 006
+ 0. 144	+ 0. 151	+ 0. 132
— 0. 153	— 0. 180	— 0. 127
+ 0. 093	+ 0. 089	+ 0. 078
δB = + 1″,915 ;	δA = + 0″,268 ;	δC = + 1″,447

und die Annahme $A = n''$ giebt

+ 1″,815	+ 0″,199	+ 1″,352
— 0. 002	— 0. 001	+ 0. 001
+ 0. 020	+ 0. 018	+ 0. 010
— 0. 010	— 0. 014	— 0. 007
+ 0. 217	+ 0. 228	+ 0. 200
— 0. 110	— 0. 121	— 0. 085
— 0. 010	— 0. 037	— 0. 019
δC = + 1″,920 ;	δB = + 0″,272 ;	δA = + 1″,452

Hier giebt sich in der That, wie oben vorausgesetzt wurde, zu erkennen, dass die Resultate der drei verschiedenen Berechnungsarten weit näher mit einander übereinstimmen, wie bei den vorhergehenden, grösseren Dreiecken der Fall war. Denn während dort der grösste Unterschied auf 0″,02 bis 0″,03 stieg, erreicht er hier höchstens 0″,006. Berechnet man das sphärische Dreieck strenge, so findet man

$$A + \delta A = 56^0\ 0'\ 31'',74\ ; \quad \delta A = +\ 1'',90$$
$$B + \delta B = 45\ 26\ 37,68\ ; \quad \delta B = +\ 0,28$$
$$C + \delta C = 80\ \ 0\ \ 1,47\ ; \quad \delta C = +\ 1,47$$

und hiemit werden die Unterschiede von den oben berechneten Werthen der Winkeländerungen ohne Unterschied

$$-\ 0'',02\ ; \quad +\ 0'',01\ ; \quad +\ 0'',02$$

die für befriedigend gehalten werden müssen. Denn obgleich ich hier wieder die strengen Rechnungen mit Logarithmen von acht Decimalen ausgeführt habe, so zeigte sich doch am Ende derselben, dass dieses nicht ausreichend war um in den Winkeln des sphärischen Dreiecks einen Fehler von nicht mehr wie 0″,005 vollständig verbürgen zu können.

145.

Ausserdem will ich einer Eigenthümlichkeit wegen, die die Winkeländerungen darbieten können, und die in den vorstehenden Dreiecken nicht vorkommt, noch ein Dreieck einschalten, aber ganz kurz behandeln. Die folgenden Stücke, die grösstentheils nur mit Logarithmen von fünf Decimalen berechnet worden sind,

$$\begin{array}{lll}
\beta = 50^0\ 8',0\ ; & \beta' = 34^0\ 4',6\ ; & \beta'' = 45^0\,26',7 \\
\alpha' = 80\ \ 0.0\ ; & \alpha_{,}'' = 211\ 41.8\ ; & \alpha_{,,} = 339\ 35.7 \\
\alpha'' = 42\ 45.7\ ; & \alpha_{,} = 162\ 49.2\ ; & \alpha_{,,}' = 244\ \ 7.8 \\
n = 37\ 14.3\ ; & n' = 48\ 52.6\ ; & n'' = 95\ 27.9 \\
\sigma = 12\ \ 0.0\ ; & \sigma' = 15\ \ 0.0\ ; & \sigma'' = 20\ \ 0.0
\end{array}$$

gehören einem sphärischen Dreieck an, neben welchem, um die Breiten und Azimuthe zu erhalten, auf der Kugel ein passender Punkt als Pol betrachtet worden ist. Wenn man von den vorstehenden Dreiecksstücken die Anzahl unverändert lässt, die für die Berechnung eines sphäroidischen Dreiecks nothwendig und hinreichend ist, und damit das sphäroidische Dreieck berechnet, so ist es klar, dass die übrigen Stücke des letzteren von den übrigen obigen Stücken nur wenig abweichen werden. Von der anderen Seite betrachtet, ist es für die Erlangung von sehr genauen Werthen der Winkeländerungen durch die Ausdrücke des Art. 138 nicht erforderlich die Dreiecksstücke, die dazu angewandt werden müssen, mit grosser Schärfe zu kennen, und man kann daher aus den obigen Daten schon die Winkeländerungen des angedeuteten sphäroidischen Dreiecks mit vieler Genauigkeit berechnen. Diese Rechnung gab die folgenden Resultate, die ich auf dieselbe Art wie vorher aufgestellt habe.

$A = n.$

$\left\{\begin{matrix} 0'',000 \\ 0.000 \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} -\ 1'',742 \\ -\ 0.006 \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} -\ 0'',515 \\ -\ 0.002 \end{matrix}\right\}$
+ 0. 018	+ 0. 016	+ 0. 018
+ 0. 012	+ 0. 006	+ 0. 002
— 0. 019	— 0. 021	— 0. 008
+ 0. 001	+ 0. 001	+ 0. 001
+ 0. 317	+ 0. 298	+ 0. 258
— 0. 094	— 0. 116	— 0. 083
— 0. 096	— 0. 117	— 0. 075
$\delta A = +\ 0'',139$	$\delta B = -\ 1'',681$	$\delta C = -\ 0'',406$

$A = n'$.

$+ 0'',018$	$- 1'',732$	$- 0'',499$
$- 0.009$	$- 0.016$	$+ 0.003$
$+ 0.001$	$+ 0.001$	$+ 0,001$
$+ 0.013$	$+ 0.009$	$+ 0.005$
$+ 0.169$	$+ 0.159$	$+ 0.138$
$- 0.204$	$- 0.231$	$- 0.164$
$+ 0.139$	$+ 0.119$	$+ 0.101$
$\delta C = + 0'',127$,	$\delta A = - 1'',691$,	$\delta B = - 0'',415$

$A = n''$.

$+ 0'',018$	$- 1'',732$	$- 0'',499$
0.000	0.000	0.000
$+ 0.017$	$+ 0.013$	$+ 0,007$
$- 0.032$	$- 0.034$	$- 0.014$
$+ 0.273$	$+ 0.257$	$+ 0.224$
$- 0.160$	$- 0.176$	$- 0,124$
$+ 0.019$	$- 0.015$	$- 0.001$
$\delta B = + 0'',135$	$\delta C = - 1'',687$	$\delta A = - 0'',407$

Die Eigenthümlichkeit, die dieses Dreieck darbietet, besteht darin, dass in der Aenderung des Winkels n das erste Glied, welches in der Regel das grösste ist, Null wird. Im Uebrigen bietet dieses Dreieck in den Winkeländerungen ähnliche Umstände da, wie die vorhergehenden Dreiecke.

146.

Ich meine durch die vorhergehenden Beispiele das in diesem Abschnitt entwickelte Verfahren zur Auflösung von sphäroidischen Dreiecken, durch ihre Reduction auf sphärische, in Bezug auf dessen Anwendbarkeit ausreichend erläutert zu haben, kann aber dieses Thema nicht schliessen, ohne eine interessante und wichtige Eigenschaft, die die Ausdrücke des Art. 138 besitzen, aus einander gesetzt zu haben, und die durch die numerischen Beispiele aufgedeckt worden ist.

Das erste Glied einer jeden der im Vorhergehenden berechneten Winkeländerungen ist das Resultat, welches man erhalten haben würde,

wenn die Rechnung nach den Ausdrücken (112) geführt worden wäre. Denn das erste Glied eines jeden der drei Ausdrücke des Art. 138 ist bez. mit einem der drei Ausdrücke (112) identisch. Analysirt man dieses Glied, so wird man finden, dass es Glieder der vierten, fünften, und der höheren Ordnungen enthält, und diese sind daher auch in dem numerischen Betrage desselben enthalten, in so weit die letztgenannten merklich werden. Es ist aber nur bis auf Grössen sechster Ordnung richtig, weil die anderweitigen Glieder sechster und höherer Ordnungen nicht darin enthalten sind. Diese sind aber in den Ausdrücken des Art. 138 mit enthalten, und es sind überhaupt die Glieder, durch welche sich diese Ausdrücke von den (112) unterscheiden, die in den letzteren fehlenden Glieder sechster und siebenter Ordnung. Von diesen sind die mit $\cos 2\alpha'$, $\cos^2 2\alpha'$, $\sin^2\alpha'$, $\cos^2\alpha'$ multiplicirten blos von der sechsten Ordnung, die mit $\cos 2\beta'$ und $\cos 2\gamma'$ multiplicirten von der sechsten, siebenten und höheren Ordnungen; das letzte endlich, welches mit $\sin\alpha' \cos\alpha'$ multiplicirt ist, enthält blos Glieder der siebenten Ordnung. Die numerischen Angaben der vorhergehenden Artikel zeigen nun für jedes Beispiel den numerischen Betrag eines jeden dieser Glieder, und man kann diese leicht so anordnen, dass die verschiedenen Ordnungen von einander getrennt erscheinen.

Für unsern Zweck ist es nun erforderlich, dass zuerst im ersten Gliede nur die Glieder vierter Ordnung von denen höherer Ordnungen getrennt werden, und da leicht gezeigt werden kann, dass jene sowohl für δA wie für δB und δC sich in das einzige Glied $-\frac{1}{3}\,\Delta\, e^2 \sin 2\alpha'$ zusammen ziehen, so braucht man nur den Werth dieses Gliedes zu berechnen, und denselben vom Betrage des unveränderten Gliedes abzuziehen, um die verlangte Trennung zu erhalten. Wendet man diese Rechnung auf das Beispiel des Art. 141 an, in welchem die hier zu betrachtenden Umstände am Meisten hervortreten, so ergeben sich die folgenden Zusammenstellungen

δA, δB, δC für $A = n$.

Glieder 4ter	Ordn.	0	0	0
„ 5ter, etc.	„	$-1'',564$	$-1'',145$	$-3'',547$

δC, δB, δA für $A = n'$.

Glieder 4ter Ordn.	$-7'',932$	$-7'',932$	$-7'',932$
„ 5ter, etc. „	$+6,368$	$+6,787$	$+4,385$
Summen	$-1'',564$	$-1'',145$	$-3'',547$

wie oben.

δC, δA, δB für $A = n''$.

Glieder 4ter Ordn.	$+1'',676$	$+1'',676$	$+1'',676$
„ 5ter, etc. „	$-3,240$	$-2,821$	$-5,223$
Summen	$-1'',564$	$-1'',145$	$-3'',547$

wie oben. Hier bemerkt man zuerst, dass sowohl der Betrag der Glieder vierter Ordnung für sich, so wie der der Glieder höherer Ordnungen sehr verschieden ausfällt, jenachdem die eine oder die andere der drei verschiedenen Berechnungsarten angewandt worden ist, während die Summe aller dieser Glieder einen feststehenden Werth hat. Auch giebt sich zu erkennen, dass die Glieder fünfter Ordnung weit grösser werden können wie die der vierten; dieses ist in unserm Beispiel bei $A = n$ und $A = n''$ der Fall, und im ersteren Falle werden die Glieder vierter Ordnung sogar gleich Null. Man sieht ein, dass diese Umstände, obgleich in verkleinertem Maasse, auch bei den kleinsten Dreiecken vorkommen können, und dass daher die blose Berücksichtigung der Glieder vierter Ordnung jedenfalls nur ein ungenaues Resultat hervorbringen kann.

Betrachten wir jetzt die übrigen Glieder unserer Ausdrücke, so lässt sich eine ähnliche Trennung der Glieder sechster und höherer Ordnungen auch leicht bewerkstelligen, man braucht nur allenthalben $\cos 2\alpha'$ für $\cos 2\beta'$ und $\cos 2\gamma'$ zu setzen, und nach dieser Veränderung den numerischen Betrag der betreffenden Glieder wieder zu berechnen; dieser ist die Summe der in diesen Gliedern enthaltenen Glieder sechster Ordnung, und zieht man ihn vom vollständigen Werthe ab, so ergeben sich die in diesen Gliedern enthaltenen Glieder höherer Ordnungen. Auf diese Art habe ich die folgenden Zusammenstellungen erhalten, denen ich die oben schon angeführten anreihe, um die so geordneten Ausdrücke vollständig beisammen zu haben.

δA, δB, δC für $A = n$.

Glieder 4ter Ordn.	0	0	0
„ 5ter, etc. „	— 1",564	— 1",145	— 3",547
„ 6ter „	+ 0. 217	+ 0. 220	+ 0. 166
„ 7ter, etc. „	— 0. 060	— 0. 043	— 0. 127
Sn. wie im Art. 141	— 1",407 ,	— 0", 968 ,	— 3",508 ,

δC, δB, δA für $A = n'$.

Glieder 4ter Ordn.	— 7",932	— 7",932	— 7",932
„ 5ter, etc. „	+ 6, 368	+ 6, 787	+ 4, 385
„ 6ter „	— 0. 098	— 0. 149	— 0. 226
„ 7ter, etc. „	+ 0. 236	+ 0. 305	+ 0. 249
Sn. wie im Art. 141	— 1",426 ,	— 0",989 ,	— 3",524

δC, δA, δB für $A = n''$.

Glieder 4ter Ordn.	+ 1",676	+ 1",676	+ 1",676
„ 5ter, etc. „	— 3, 240	— 2, 821	— 5, 223
„ 6ter „	+ 0. 302	+ 0. 362	+ 0. 288
„ 7ter, etc, „	— 0. 139	— 0. 182	— 0. 244
Sn. wie im Art. 141	— 1",401	— 0",965	— 3",503

Hier zeigt sich in Bezug auf die Glieder sechster und siebenter Ordnung ein ähnliches Verhalten wie das oben bei den Gliedern vierter und fünfter Ordnung wahrgenommene. Die Glieder sechster Ordnung für eine und dieselbe Winkeländerung bekommen in den drei verschiedenen Berechnungsarten verschiedene Werthe, deren Schwankungen bis auf 0",5 steigen, und die Glieder siebenter Ordnung haben dieselben Schwankungen im entgegengesetzten Sinne, so dass, vorbehältlich der kleinen Unterschiede, die von anfangender Wirkung der Glieder höherer Ordnung zeugen, die Summe der Glieder sechster und siebenter Ordnung feststehende Werthe bekommen. Die Rechnung für $A = n'$ zeigt überdiess, dass auch die Summe der Glieder siebenter Ordnung beträchtlich grösser werden kann, wie die der sechsten Ordnung. Es folgt aus diesem, dass die blose Hinzufügung der fehlenden Glieder sechster Ordnung zu den Ausdrücken (112) gar keinen Nutzen herbeigeführt haben würde, und dass nur die Mitaufnahme der Glieder siebenter Ordnung eine wesentliche Vergrösserung der Genauigkeit in den Resultaten bewirkt hat.

In den Dreiecken, die an den Pol, oder an den Aequator reichen, treten diese Umstände auch, nur nicht in so grossem Maasse wie in dem hier betrachteten Dreieck, hervor, aber in dem Dreieck des Art. 144 werden sie, namentlich in der zweiten Berechnungsart, wieder sehr merklich, weshalb ich in Bezug auf diese dieselbe Trennung der Glieder vornehmen will. Man erhält für dieses Dreieck

δB, δA, δC für $A = n'$.

	δB	δA	δC
Glieder 4ter Ordn.	— 2″,580	— 2″,580	— 2″,580
„ 5ter, etc. „	+ 4. 374	+ 2. 762	+ 3. 912
„ 6ter „	— 0. 022	— 0. 045	— 0. 001
„ 7ter, etc. „	+ 0. 143	+ 0. 131	+ 0. 116
Sn. wie im Art. 144	+ 1″,915,	+ 0″,268,	+ 1″,447

Hier sind, wie man sieht, nicht blos die Glieder fünfter Ordnung grösser wie die der vierten, sondern dasselbe findet zugleich in Bezug auf die Glieder siebenter und sechster Ordnung statt. In den Ausdrücken für die Fläche des sphäroidischen Dreiecks, und in den für die Summe der Winkel desselben kann Aehnliches auch vorkommen.

Es ist noch eines Umstandes zu erwähnen. In der Regel ist die Summe der Glieder vierter und fünfter Ordnung bedeutend grösser wie die Summe der Glieder sechster und siebenter Ordnung, und es lässt sich voraus sehen, dass die Summe der Glieder achter und neunter Ordnung auch wesentlich kleiner sein wird, wie die der sechsten und siebenten Ordnung u. s. w., wenn man nur die Dreiecke nicht allzu gross auswählt; hierin spricht sich im Allgemeinen die Convergenz der Ausdrücke aus. Man kann aber auch Dreiecke angeben in welchen diese Regel eine Ausnahme erleidet, und für Einen, ja selbst für zwei Dreieckswinkel das erste Glied, also die Summe der vierten, und der damit verbundenen Glieder fünfter und höherer Ordnungen kleiner wie die Summe der übrigen Glieder sechster und höherer Ordnungen, und sogar gleich Null wird. Um dieses auch durch ein Beispiel, wenigstens an Einem Winkel zu zeigen, ist das Dreieck des Art. 145 berechnet worden. Auf die Convergenz der Ausdrücke hat dieser Umstand übrigens keinen Einfluss.

Schliesslich bemerke ich noch, dass das im Vorhergehenden entwickelte Verfahren nicht blos in dem Falle Anwendung findet, in welchem die drei Dreiecksseiten ursprünglich gegeben sind, sondern allge-



mein bei vielfach anderen gegebenen Stücken des Dreiecks auch angewandt werden kann. Es bildet daher dieses Verfahren eine besondere Auflösungsart von sphäroidischen Dreiecken, die nicht grösser sind, wie die oben beispielsweise betrachteten.

147.

Die Formeln zur Reduction eines sphärischen Dreiecks auf ein ebenes brauchen wohl nicht durch Beispiele erläutert zu werden, da sie so sehr einfach sind, es möchte aber dagegen die Zusammenstellung der Correctionen, die man an die beobachteten Richtungen oder Winkel eines Dreiecksnetzes vor der Ausgleichung desselben anbringen muss, als Schluss dieses Abschnittes nicht am unrechten Platze sein.

Zuerst ist der erste Ausdruck (53) zu berücksichtigen, der ohne die Genauigkeit, die er besitzt, zu beeinträchtigen, wie folgt gestellt werden kann,

$$(135)\quad R = R_0 - \frac{e^2}{6r}\sigma^2\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha' - \frac{e^2}{24r^2}\sigma^3\sin\beta'\cos\beta'\sin\alpha'$$

wo die Bezeichnungen in den Correctionsgliedern die des zweiten Abschnittes sind. Es bedeuten also σ die in Bogentheilen ausgedrückte Dreiecksseite, deren Richtung man eingeschnitten hat, α' das Azimuth derselben, β' die reducirte Breite des Beobachtungsortes, die nur mit geringer Genauigkeit hiefür bekannt zu sein brauchen, und es ist $r = 206265''$. Wenn σ in irgend einem Linearmaasse statt in Bogentheilen ausgedrückt ist, so ist es leicht den Ausdruck der Constante zu finden, die an die Stelle von r gesetzt werden muss; man kann sich auch begnügen für β' die Polhöhe des Stationsortes zu substituiren. Es bezeichnen hier ferner R_0 die beobachtete, und R die verbesserte, aufs geodätische Azimuth hingeführte Richtung.

Wenn nicht Richtungen, sondern Winkel beobachtet worden sind, so zerlegt man diese in die Richtungen ihrer beiden Schenkel und bringt an jedem dieser die durch (135) gegebene Correction an.

Hierauf sind die aus den Ausdrücken (96) und (112) hervorgehenden Correctionen zu berechnen, und an die aus den Richtungen folgenden, oder unmittelbar beobachteten Winkel anzubringen. Oftmals kann man sich begnügen statt der einzelnen Werthe der (96) und (112) die

dabei angegebenen Summen derselben zu benutzen, und damit die Summe der durch die Beobachtungen erhaltenen Winkel der einzelnen Dreiecke zu verbessern. Wenn dieses geschehen ist, kann das ganze Dreiecksnetz als auf der Ebene liegend betrachtet werden, und die trigonometrischen Bedingungen, die zur Ausgleichung desselben erforderlich sind, müssen der ebenen Trigonometrie entnommen werden.

Nach vollendeter Ausgleichung müssen die aus den Ausdrücken (96) und (112) entsprungenen Correctionen, wenn sie vorher an die einzelnen Winkel angebracht worden sind, wieder davon abgezogen werden, die aus der (135) hervorgegangenen hingegen an den Richtungen und Winkeln belassen werden.

Die Ausführung der Berechnung der eben genannten Correctionen setzt eine vorläufige Berechnung des Dreiecksnetzes voraus, die also vorangegangen sein muss, und auch aus anderen Ursachen nicht entbehrt werden kann.

Im Vorhergehenden sind alle nothwendigen Correctionen vollständig enthalten, allein man wird in der Anwendung finden, dass gemeiniglich diejenigen, die sich auf die Uebertragung der sphäroidischen Dreiecke auf sphärische, so wie die Correction der Azimuthe beziehen, unmerklich werden, und nur dann, wenn die Beschaffenheit des Bodens die unmittelbare Messung von besonders grossen Dreiecken gestattet hat, etwas Merkliches geben können. In den Dreiecken gewöhnlicher Ausdehnung kann man sich gemeiniglich begnügen blos die Ausdrücke (96), und zwar mit Weglassung der Glieder vierter Ordnung, mit anderen Worten, den Legendre'schen Satz anzuwenden. Man thut jedoch wohl, sich mit der Wirkung der Ausdrücke (135) und (112) im Allgemeinen bekannt zu machen, um eine Uebergehung derselben in den Fällen, wo sie nicht ganz unmerklich sein sollten, zu vermeiden.*)

Es darf nicht übersehen werden, dass in diesem Artikel blos von den bei der Ausgleichung der wirklich beobachteten Richtungen oder Winkel eines Dreiecksnetzes zu beachtenden Umständen die Rede ist,

*) In der englischen Ordonance Survey kommt ein Dreieck vor, in welchem die Summe der Winkel $180^0 1' 4'',9$ beträgt. Hier wird $\Delta e^2 = 0'',43$, und die Reduction eines solchen Dreiecks auf ein sphärisches, sowohl wie der Ausdruck (135), können daher sehr wohl etwas Merkliches geben.

und dass nur in Bezug auf diese die Unterschiede zwischen den sphäroidischen Richtungen oder Winkeln häufig unmerklich sind. Diesem steht die weitere Berechnung des Dreiecksnetzes, in welcher die unmittelbar gemessenen Dreiecke zu grösseren mit einander verbunden werden müssen, gegenüber; in diesen Verbindungen ist die Berücksichtigung der Ellipticität der Erdoberfläche unerlässlich nothwendig, da sie bedeutenden Einfluss äussern kann, und hier kommen sowohl die Aufgaben der vorhergehenden Abschnitte, wie die Hauptaufgabe dieses Abschnittes und die, welche im folgenden Abschnitte noch gelöst werden soll, wesentlich in Betracht.

Vierter Abschnitt.

148.

Die im vorigen Abschnitt für beliebig grosse Dreiecksseiten entwickelten Ausdrücke zur Reduction der Winkel des sphäroidischen Dreiecks auf die eines sphärischen sind noch einer anderen Anwendung fähig, die auf die Auflösung einer neuen Klasse von Aufgaben führt. Die in den Artt. 92, 95, 98 für diese Reduction erhaltenen Ausdrücke, die sich noch dazu auf ein besonderes sphäroidisches Dreieck beziehen, sind zu zusammengesetzt als dass sie einer fortgesetzten Anwendung fähig sein könnten, und würden noch zusammengesetzter werden, wenn man sie auf das allgemeine sphäroidische Dreieck ausdehnen wollte. Eine Hinführung derselben auf eine einfachere Form scheint im Allgemeinen nicht möglich zu sein, dagegen giebt es einen besonderen Fall, in welchem sie sich wesentlich vereinfachen, und dieser Fall ist einer mannigfachen Anwendung fähig.

149.

Die grösseren Dreiecke deren Auflösung in der Geodäsie verlangt wird, um von den ausgeglichenen Dreiecksnetzen auf die Gestalt des Erdkörpers zu schliessen, sind grösstentheils solche deren eine Ecke in einem der beiden Pole des Ellipsoids liegt. Solche Dreiecke haben auch die Hauptaufgaben des ersten und des zweiten Abschnittes ge-

bildet, und wendet man die eben erwähnten Reductionsformeln auf ein solches Dreieck an, so werden sie viel einfacher. Zu dem Ende muss man den Punkt D der Figur des Art. 84 in den Pol P verlegen, wodurch die Seite DE mit dem Meridian PC zusammenfällt, und das Dreieck GPE hervorgeht. Da hierauf $\beta = 90^0$ wird, so reduciren sich die genannten Reductionsformeln alle drei auf ihr erstes, von β unabhängiges Glied, und werden folglich viel einfacher.

150.

Für die jetzt zu erreichenden Zwecke wird es dienlich sein eine neue Bezeichnung einzuführen. Setzen wir in dem sphäroidischen Dreieck PGE der Figur die Seiten und die Winkel

$$PG = \Sigma' \,,\quad PGE = 180^0 - \alpha'$$
$$PE = \Sigma'' \,,\quad PEG = \alpha''$$
$$EG = \sigma \,,\quad EPG = \lambda$$

und bezeichnen die reducirte Breite des Punkts G mit β', und die des Punkts E mit β'', dann ist die Analogie mit den früheren Bezeichnungen hergestellt. Seien ausserdem in dem correspondirenden sphärischen Dreieck die Winkel bez.

$$180^0 - A' \,,\quad A'' \,,\quad \Lambda$$

und die Winkeländerungen $\Delta\alpha'$, $\Delta\alpha''$, $\Delta\lambda$ so verstanden, dass

$$\alpha' = A' + \Delta\alpha'$$
$$\alpha'' = A'' + \Delta\alpha''$$
$$\lambda = \Lambda + \Delta\lambda$$

werden, so dürfen wir ohne Nachtheil der Genauigkeit in den Reductionsformeln der Artt. 92, 95, 98, nachdem darin $\beta = 90^0$ gemacht worden ist,

$\Delta\alpha'$	statt	Δm
$-\Delta\alpha''$	„	$\Delta n'$
$-\Delta\lambda$	„	$\Delta\alpha''$
σ	„	φ
Σ'	„	φ'
Σ''	„	χ''
$180^0 - A'$	„	m
A''	„	n'
Λ	„	α''

setzen, und erhalten damit, wenn zur Abkürzung

$$Q' = \frac{1}{4}\, e^2 \left\{ \frac{\Sigma'}{\sin \Sigma'} - \frac{\sigma}{\sin \sigma} \cos \Sigma'' \right\}$$

$$Q'' = \frac{1}{4}\, e^2 \left\{ \frac{\Sigma''}{\sin \Sigma''} - \frac{\sigma}{\sin \sigma} \cos \Sigma' \right\}$$

gesetzt wird,

$$\Delta\alpha' = Q' \operatorname{cotg} \Delta - Q'' \frac{\sin A'}{\sin A'' \sin \Delta}$$

$$+ \frac{1}{4}\, e^2 \frac{\sigma}{\sin \sigma} \sin A'' \cos A'' \sin^2 \Sigma'' - \frac{1}{4} r e^2 \sin A' \cos A' \sin^2 \Sigma'$$

$$\Delta\alpha'' = Q' \frac{\sin A''}{\sin A' \sin \Delta} - Q'' \operatorname{cotg} \Delta$$

$$+ \frac{1}{4}\, e^2 \frac{\sigma}{\sin \sigma} \sin A' \cos A' \sin^2 \Sigma' - \frac{1}{4} r e^2 \sin A'' \cos A'' \sin^2 \Sigma''$$

$$\Delta\lambda = Q' \operatorname{cotg} A' - Q'' \operatorname{cotg} A''$$

deren Berechnung einfach ist. Ich füge hinzu dass man

$$\log \frac{1}{4} e^2 = 7.22235\,; \quad \log \frac{1}{4} r e^2 = 2.53677$$

erhält.

151.

Indem ich nun annehme, dass β', β'', σ gegeben sind, so ist hiemit nur eine Dreiecksseite unmittelbar gegeben, und die beiden anderen müssen erst aus β' und β'' berechnet werden, und dieses geschieht durch die Aufgabe des Art. 63, in welcher die eine Breite, oder Polhöhe $= 90^0$ zu setzen ist. Wendet man die dort gegebene Auflösung, unter der genannten Annahme, auf den Ausdruck (91) an, so findet man leicht

$$(136) \quad . \begin{cases} \chi' = 90^0 - \beta'\,; \quad \chi'' = 90^0 - \beta'' \\ \Sigma' = \chi' - A'\chi' + B' \sin 2\chi' - C' \sin 4\chi' \\ \Sigma'' = \chi'' - A'\chi'' + B' \sin 2\chi'' - C' \sin 4\chi'' \end{cases}$$

woraus die Dreiecksseiten Σ' und Σ'' hervorgehen, wenn

$$\log A' = 7.2228952\,; \quad \log B' = 2.2364718\,; \quad \log C' = 8.55719$$

gesetzt werden. Um Alles beisammen zu haben, führe ich noch die ausserdem anzuwendenden Formeln der sphärischen Trigonometrie an.

$$\left.\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}(\Sigma' + \Sigma'' + \sigma) \\ T &= \sqrt{\frac{\sin(S-\Sigma')\sin(S-\Sigma'')\sin(S-\sigma)}{\sin S}} \\ \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A' &= \frac{T}{\sin(S-\Sigma'')} \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A'' &= \frac{T}{\sin(S-\Sigma')} \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varDelta &= \frac{T}{\sin(S-\sigma)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (137)$$

152.

Ich werde nun zuerst an zwei Beispielen zeigen wie nahe die eben erhaltenen Reductionsformeln mit der strengen Rechnung übereinstimmen. Zuerst nehme ich das grösste Dreieck vor, welches in dieser Abhandlung vorkommt, nemlich das zwischen Santiago, Moskau und dem Nordpol der Erde. Nach dem Art. 69 sind in diesem Dreieck

$$\begin{aligned} \beta' &= 55^0\,39'\,38'',49\,, & \alpha' &= 83^0\,23\;\;51'',20 \\ \beta'' &= -33\;\;20\;\;42,63\,, & \alpha'' &= 42\;\;\;7\;\;37,98 \\ \sigma &= 126\;\;46\;\;18,17\,, & \lambda &= 108\;\;13\;\;\;0,00 \end{aligned}$$

Wendet man zuerst die Ausdrücke (136) an, so findet man

$$\begin{aligned} \Sigma' &= 34^0\;19'\;35'',54 \\ \Sigma'' &= 123\;\;\;5\;\;42,43 \end{aligned}$$

Aus den jetzt bekannten Seiten dieses Dreiecks geben nun die obigen Formeln (137)

$$\begin{aligned} A' &= 83^0\;25'\;58'',0 \\ A'' &= 41\;\;57\;\;58,8 \\ \varDelta &= 108\;\;13\;\;\;5,1 \end{aligned}$$

und durch die Anwendung der Reductionsformeln des vorvor. Art. bekommt man

$$\begin{aligned} \varDelta\alpha' &= -\,2'\;4'',5 \\ \varDelta\alpha'' &= +\,9\;\;33,3 \\ \varDelta\lambda &= -\,0\;\;\;6,5 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \alpha' &= 83^0\;23'\;53'',5 \\ \alpha'' &= 42\;\;\;7\;\;32,1 \\ \lambda &= 108\;\;12\;\;58,6 \end{aligned}$$

Die Unterschiede mit den oben angeführten, strenge berechneten Winkeln sind also nur

$$+ 2'',3\ ; \quad - 5'',9\ ; \quad - 1'',4$$

in Betracht der ansehnlichen Grösse dieses Dreiecks, dessen sphärischer Ueberschuss 66°45′ beträgt, sehr geringe.

153.

Als zweites Beispiel soll das langgestreckte, schmale Dreieck zwischen Christiania, Palermo und dem Nordpol der Erde dienen. Die Art. 38 oder 71 geben die genauen Werthe

$$\begin{aligned} \beta' &= 59^0\,50'\ \ 0'',19\,, & \alpha' &= 5^0\,34'\,56'',12 \\ \beta'' &= 38\ \ \ 1\ \ 24,73\,, & \alpha'' &= 3\ \ 33\ \ 27,42 \\ \sigma &= 21\ \ 50\ \ 33,91\,, & \lambda &= 2\ \ 38\ \ \ 0,00 \end{aligned}$$

und hiemit geben die Ausdrücke (136)

$$\begin{aligned} \Sigma' &= 30^0\ \ 9'\,28'',12 \\ \Sigma'' &= 51\ \ 56\ \ \ 9,97 \end{aligned}$$

Die sphärische Trigonometrie giebt hierauf durch die (137)

$$\begin{aligned} A' &= 5^0\,34'\,53'',1 \\ A'' &= 3\ \ 33\ \ 29,2 \\ \varDelta &= 2\ \ 38\ \ \ 3,6 \end{aligned}$$

*) und die Reductionsformeln des Art. 150

$$\begin{aligned} \log Q' &= 2.15586 \\ \log Q'' &= 1.96057 \end{aligned}$$

hiemit wird

$$\begin{aligned} \varDelta\alpha' &= +\ 3'',1 \\ \varDelta\alpha'' &= -\ 1,7 \\ \varDelta\lambda &= -\ 3,6 \end{aligned}$$

woraus

---

*) Ich bemerke hiezu, dass die Zehntelsecunden in diesen Winkeln möglicher Weise um einige wenige Einheiten unrichtig sein können, da hier 0″,01 Aenderung der Seite Σ'' eine Aenderung von 0″,43 in A' hervorbringt. Das obige Resultat ist durch Anwendung von Logarithmen von nicht mehr wie sieben Stellen erhalten worden.



$$\alpha' = 5^0\,34'\,56'',2$$
$$\alpha'' = 3\;\;33\;\;27,\,5$$
$$\lambda = 2\;\;38\;\;\;0,\,0$$

folgt. Die Unterschiede zwischen diesen und den genauen sphäroidischen Winkeln sind

$$+\,0'',1\;;\quad +\,0'',1\;;\quad 0'',0$$

also verschwindend.

154.

Die vorhergehenden Beispiele zeigen wie nahe bei den grössten und verschiedenartigst geformten sphäroidischen Dreiecken die im Art. 150 abgeleiteten Reductionsformeln die richtigen Resultate geben, und in den Fällen, wo es auf einige wenige Secunden im Resultat nicht ankommt, kann man sie jederzeit anwenden, und zwar nicht blos in den Fällen, wo die drei Seiten des Dreiecks, sondern auch in denen, in welchen andere Stücke desselben gegeben sind.

Aber es lässt sich eine ausgedehntere Anwendung davon machen, und eine Reihe von Aufgaben durch Zuziehung derselben mit beliebiger Genauigkeit und mit Leichtigkeit lösen. Unter diesen soll hier, um diese Abhandlung nicht zu weit auszudehnen, nur die folgende mit ihren Hauptverzweigungen betrachtet werden:

»Gegeben sei eine beliebige geodätische Linie auf dem Erd»ellipsoid, nebst den Polhöhen ihrer beiden Endpunkte. Man fragt »nach dem geographischen Längenunterschiede dieser beiden End»punkte und den Azimuthen der geodätischen Linie an denselben.«

155.

Durch die Polhöhen der Endpunkte der geodätischen Linie ist die Lage dieser auf dem Erdellipsoid unzweideutig gegeben, und die Aufgabe ist daher eine bestimmte. Um sie zu lösen, rechne man zuerst die beiden reducirten Breiten β' und β'', die den gegebenen Polhöhen zukommen, dann durch die (136) die denselben entsprechenden Meridianbögen Σ' und Σ'', und hierauf durch die (137) die sphärischen Winkel A', A'', $\mathcal{A}$. Diese Rechnungen brauchen nicht mit der grössten Schärfe ausgeführt zu werden. Von den Reductionen auf die sphäroidischen Winkel ist jetzt nur die Eine, und zwar $\Delta\alpha'$, zu berechnen, weshalb ich die dazu erforderlichen Ausdrücke hier wiederholen will.

$$(138)\left\{\begin{aligned} Q' &= \tfrac{1}{4}\, e^2 \left\{\frac{\Sigma'}{\sin\Sigma'} - \frac{\sigma}{\sin\sigma}\cos\Sigma''\right\} \\ Q'' &= \tfrac{1}{4}\, e^2 \left\{\frac{\Sigma''}{\sin\Sigma''} - \frac{\sigma}{\sin\sigma}\cos\Sigma'\right\} \\ \varDelta\alpha' &= Q'\operatorname{cotg}\varDelta - Q''\frac{\sin A'}{\sin A''\sin\varDelta} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\, e^2\frac{\sigma}{\sin\sigma}\sin A''\cos A''\sin^2\Sigma'' - \tfrac{1}{4}\, re^2\sin A'\cos A'\sin^2\Sigma' \\ \alpha' &= A' + \varDelta\alpha' \end{aligned}\right.$$

Vermittelst der gegebenen Stücke β', α', σ, von welchen jedoch α' nur näherungsweise richtig ist, rechne man durch die Hauptaufgabe des ersten Abschnittes α'', λ, β'', und wenn dieser Werth von β'' mit dem ursprünglich gegebenen übereinstimmt, so sind auch alle übrigen Grössen so richtig wie möglich, und die Auflösung unserer Aufgabe ist vollendet. In der Regel wird aber der auf diese Art berechnete Werth von β'', den ich mit (β'') bezeichnen will, mit dem ursprünglich gegebenen nicht vollständig übereinstimmen, sondern um eine kleine Grösse davon verschieden sein, setzt man daher, wenn durch β'' der ursprünglich gegebene Werth dieses Bogens bezeichnet wird,

$$\delta\beta'' = \beta'' - (\beta'')$$

so kann man durch einfache Differentialformeln die Berichtigung der übrigen Bögen erhalten.

Da man hier voraussetzen muss, dass auch die erhaltenen Werthe der Hülfsbögen χ und $\varDelta\omega$ nicht vollständig genau erhalten worden sind, so muss in den Differentialformeln darauf Rücksicht genommen werden. Die Differentiation der Gleichungen (28) giebt leicht

$$(139)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned} \delta\alpha' &= \frac{1}{\sin\chi\sin\alpha''}\,\delta\beta'' + \frac{\operatorname{cotg}\alpha''}{\sin\chi}\,\delta\chi \\ \delta\alpha'' &= \frac{\operatorname{cotg}\omega}{\cos\beta''}\,\delta\beta'' + \frac{\operatorname{cotg}\alpha'}{\sin\chi}\,\delta\chi \\ \delta\omega &= \frac{\operatorname{cotg}\alpha''}{\cos\beta''}\,\delta\beta'' + \frac{1}{\cos\beta'\sin\alpha'}\,\delta\chi \\ \delta\lambda &= \delta\omega + \delta\varDelta\omega \end{aligned}\right.$$

und um $\delta\chi$ zu erhalten dient die Gleichung (17). Lässt man in dieser die mit e^4, etc. multiplicirten Glieder weg, welches hier erlaubt ist, so kann sie wie folgt geschrieben werden,

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1-e^2}} = (1+\mu)\,\chi + \mu\cos(2\varphi' + \chi)\sin\chi$$

wo

$$\mu = \frac{1}{4} e^2 \sin^2\beta_0$$

angenommen werden darf. Da nun σ hier unveränderlich ist, so giebt diese Gleichung, wenn man fortfährt μ^2 zu übergehen, zuerst

$$\delta\chi = -(\chi + \cos(2\varphi' + \chi)\sin\chi)\delta\mu + 2\mu\sin(2\varphi' + \chi)\sin\chi\delta\varphi'$$

Eliminirt man hieraus φ' durch die (15), und $\delta\mu$ und $\delta\varphi'$ durch die bez. Gleichungen des Art. 58, so wird $\delta\chi$ in Function von $\delta\alpha'$ dargestellt, und kann darauf durch die erste (139) auf $\delta\beta''$ hingeführt werden. Der Ausdruck für $\delta\omega$ ist mit geringer Abänderung der des Art. 58. Man erhält auf diese Art

$$\left.\begin{aligned} \delta\chi &= -\frac{2\mu}{\operatorname{tg}\beta_0}\left\{\frac{\frac{\chi}{r}\sin\varphi'}{\sin\chi\sin\alpha''} + \frac{\sin\varphi''}{\sin\alpha''}\right\}\delta\beta'' \\ \delta\varDelta\omega &= \frac{\varDelta\omega}{\chi}\delta\chi + \frac{\varDelta\omega}{r}\frac{\operatorname{cotg}\alpha''}{\sin\chi\sin\alpha'}\delta\beta'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Wenn daher $\delta\beta''$ nicht unmerklich ist, so rechne man $\delta\chi$ und $\delta\varDelta\omega$ aus den (140), worauf die (139) $\delta\alpha'$, $\delta\alpha''$, $\delta\omega$, $\delta\lambda$ geben, die den, wie beschrieben, erhaltenen Werthen von α', α'', λ hinzuzufügen sind. Die Verbesserungen $\delta\chi$ und $\delta\varDelta\omega$ werden in der Regel unmerklich.

156.

Die im vor. Art. gegebene Auflösung unserer Aufgabe soll durch das Beispiel erläutert werden, welches das im Vorhergehenden betrachtete Dreieck zwischen Santiago, Moskau und dem Nordpol darbietet. Sehen wir die Hinführung der beiden Polhöhen auf die reducirten Breiten als ausgeführt an, dann sind die gegebenen Stücke der Aufgabe

$$\beta' = 55^\circ 39' 38'',49\ ; \quad \beta'' = -33^\circ 20' 42'',63\ ; \quad \sigma = 126^\circ 46' 18'',17$$

Die zuerst nach den Ausdrücken (136), (137), (138) auszuführenden Reductionen sind schon im Art. 152 gegeben, und es kann der Werth von α', auf den es hier ankommt, dort entnommen werden. Die neuen gegebenen Stücke sind daher

$$\beta' = 55^\circ 39' 38'',49\ ; \quad \alpha' = 83^\circ 23' 53'',5\ ; \quad \sigma = 126^\circ 46' 18'',17$$

auf welche die Auflösung der Hauptaufgabe des ersten Abschnittes anzuwenden ist. Diese giebt

$$\varphi' = 4^0\,29'\,27'',72 \quad , \quad \Omega' = 7^0\,58'\,43'',99$$
$$\log\operatorname{tg}\beta_0 = 0.1697025 \quad , \quad \log\mu = 7.0605872$$
$$S - x = \chi = 127^0\;\;5'\;18'',48\;, \quad \varDelta\omega = 14'\,16'',626$$
$$\alpha'' = \;\;42\;\;\;7\;\;37,51\;, \quad \Omega'' = 116^0\,26'\;\;2'',26$$
$$\lambda = 108\;\;13\;\;\;1,64\;, \quad (\beta'') = -33^0\,20'\,41'',40$$

also

$$\delta\beta'' = -\,1'',23$$

Die Ausdrücke (140) geben hierauf unmerkliche Werthe von $\delta\chi$ und $\delta\varDelta\omega$, weshalb blos die Ausdrücke (139) anzuwenden sind, in welchen $\delta\chi=0$ und $\delta\varDelta\omega=0$ zu setzen ist. Die Rechnung giebt

$$\delta\alpha' = -\,2'',30\;;\quad \delta\alpha'' = +\,0'',49\;;\quad \delta\omega = \delta\lambda = -\,1'',63$$

fügt man diese dem oben zu Grunde gelegten Werthe von α', so wie den durch die Rechnung erhaltenen Werthen von α'' und λ hinzu, so wird schliesslich

$$\alpha' = \;\;83^0\,23'\,51'',20$$
$$\alpha'' = \;\;42\;\;\;7\;\;38,00$$
$$\lambda = 108\;\;13\;\;\;\;0,01$$

auf befriedigende Art mit den Angaben des Art. 69 übereinstimmend.

157.

Die in diesem Abschnitte gelöste Hauptaufgabe führt wieder zur Auflösung allgemeiner sphäroidischer Dreiecke, in Betreff welcher sich ohne Weiteres zwei Fälle darbieten.

1) »Seien zwei Seiten eines sphäroidischen Dreiecks, nebst den »Polhöhen der drei Eckpunkte des letzteren gegeben, hieraus die »übrigen Stücke desselben zu finden.«

2) »Es seien wieder zwei Seiten eines sphäroidischen Dreiecks »gegeben, und ausserdem von der einen derselben die Polhöhen ihrer »beiden Endpunkte, aber von der anderen das Azimuth des End»punkts, welchen sie mit der ersten gemeinschaftlich hat. Man fragt »nach den übrigen Stücken dieses Dreiecks.«

Für die Auflösung der ersten Aufgabe ist die in diesem Abschnitte abgehandelte Hauptaufgabe abgesondert auf beide gegebenen Dreiecksseiten anzuwenden, wodurch man die in der Hauptaufgabe des zweiten

Abschnittes als gegeben betrachteten Stücke erhält, und nunmehr durch diese die übrigen Stücke des Dreiecks berechnen kann.

In Bezug auf die Lösung der zweiten Aufgabe ist einmal die Hauptaufgabe dieses, und einmal die Hauptaufgabe des ersten Abschnittes anzuwenden, worauf die Hauptaufgabe des zweiten Abschnittes die noch zu berechnenden Stücke des Dreiecks giebt. Es brauchen von diesen Aufgaben wohl keine Beispiele gegeben zu werden.

Es wäre ein Leichtes noch eine Anzahl von Aufgaben durch die in dieser Abhandlung aufgestellten Grundsätze zu lösen, allein ich übergehe diese hier, weil sich im Voraus nicht mit Sicherheit beurtheilen lässt, wie weit sie in der praktischen Geodäsie Interesse haben oder Anwendung finden, und ziehe vor sie erst dann der Behandlung zu unterziehen, wenn sich dazu besondere Veranlassung darbieten sollte.

Zusatz zu Art. 79 u. f.

Im dritten Abschnitt sind alle auf das Revolutionsellipsoid sich beziehenden Functionen bis auf Grössen achter Ordnung entwickelt, und dasselbe findet in Bezug auf die Ausdrücke der Fläche des sphärischen Dreiecks statt. Dahingegen sind die Ausdrücke der Winkeländerungen für die Reduction des sphärischen Dreiecks auf das ebene nur bis auf Grössen sechster Ordnung entwickelt worden, und es kann daher wünschenswerth erscheinen diese auch bis auf Grössen achter Ordnung kennen zu lernen; die Glieder sechster Ordnung dieser Ausdrücke sollen hier nachträglich entwickelt werden.

Zu dem Ende sind den betreffenden Ausdrücken des Art. 79 zuerst die folgenden Glieder hinzuzufügen,

zu $\sin a \ldots \quad -\frac{1}{5040}a^6$

zu $\cos a \ldots \quad +\frac{1}{40320}a^8$

zu $\cos b \cos c \ldots \frac{1}{40320}b^8 + \frac{1}{1440}b^6c^2 + \frac{1}{576}b^4c^4 + \frac{1}{1440}b^2c^6 + \frac{1}{40320}c^8$

zu $\frac{\sin b \sin c}{bc} \ldots -\frac{1}{5040}b^6 - \frac{1}{720}b^4c^2 - \frac{1}{720}b^2c^4 - \frac{1}{5040}c^6$

zu $K \ldots \frac{1}{40320}a^8 - \frac{1}{10080}a^2b^6 - \frac{1}{1440}a^2b^4c^2 - \frac{1}{1440}a^2b^2c^4 - \frac{1}{10080}a^2c^6$

$$+\frac{1}{13440}b^8 + \frac{1}{10080}b^6c^2 - \frac{1}{2880}b^4c^4 + \frac{1}{10080}b^2c^6 + \frac{1}{13440}c^8$$



zu $\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A \ldots - \frac{1}{320} a^8 + \frac{1}{720} a^6 b^2 + \frac{1}{720} a^6 c^2 + \frac{1}{288} a^4 b^4$

$$+ \frac{1}{48} a^4 b^2 c^2 + \frac{1}{288} a^4 c^4 + \frac{1}{720} a^2 b^6 + \frac{1}{48} a^2 b^4 c^2$$

$$+ \frac{1}{48} a^2 b^2 c^4 + \frac{1}{720} a^2 c^6 - \frac{1}{820} b^8 + \frac{1}{720} b^6 c^2$$

$$+ \frac{1}{288} b^4 c^4 + \frac{1}{720} b^2 c^6 - \frac{1}{820} c^8$$

Dehnt man nun die a. a. O. ausgeführte Division auf die vorstehenden Glieder aus, so wird vollständig

$$K = -\frac{1}{6} \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A \, . \, L$$

wenn man

$$L = 1 + \frac{2}{15} a^2 + \frac{1}{10} b^2 + \frac{1}{10} c^2$$

$$+ \frac{13}{1260} a^4 + \frac{13}{630} a^2 b^2 + \frac{18}{630} a^2 c^2 + \frac{1}{168} b^4 + \frac{5}{252} b^2 c^2 + \frac{1}{168} c^4$$

setzt. Da aber auch

$$K = \sin b \sin c \{\cos A - \cos(A + \varDelta A)\}$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{\cos A - \cos(A + \varDelta A)}{\sin A} = -\frac{1}{6} \sin b \sin c \sin A \, . \, L$$

und nach der Entwickelung durch das Taylorsche Theorem

$$\varDelta A = -\frac{1}{6} \sin b \sin c \sin A \Big\{ L + \frac{1}{12} \sin b \sin c \cos A \, . \, L^2$$

$$+ \frac{1}{108} \sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A \, . \, L^3 + \frac{1}{216} \sin^2 b \sin^2 c \, . \, L^3 \Big\}$$

Dem Vorhergehenden zufolge ist mit der hier erforderlichen Genauigkeit

$$L^2 = 1 + \frac{4}{15} a^2 + \frac{1}{5} b^2 + \frac{1}{5} c^2 .$$

$$L^3 = 1$$

$$\sin b \sin c \cos A = -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{24} a^2 - \frac{1}{24} b^2 - \frac{1}{4} b^2 c^2 - \frac{1}{24} c^4$$

$$\sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A = \frac{1}{4} a^4 - \frac{1}{2} a^2 b^2 - \frac{1}{2} a^2 c^2 + \frac{1}{4} b^4 + \frac{1}{2} b^2 c^2 + \frac{1}{4} c^4$$

$$\sin^2 b \sin^2 c = b^2 c^2$$

durch deren Substitution sich

$$\varDelta A = -\frac{1}{6} \sin b \sin c \sin A \Big\{ 1 + \frac{11}{120} a^2 + \frac{17}{120} b^2 + \frac{17}{120} c^2$$

$$+ \frac{151}{30240} a^4 + \frac{71}{8780} a^2 b^2 + \frac{71}{3780} a^2 c^2 + \frac{397}{30240} b^4 + \frac{377}{15120} b^2 c^2 + \frac{397}{30240} c^4 \Big\}$$

ergiebt. Die Elimination von $\sin b \sin c$ durch die Gleichung

$$\sin b \sin c = bc \Big\{ 1 - \frac{1}{6} b^2 - \frac{1}{6} c^2 + \frac{1}{120} b^4 + \frac{1}{36} b^2 c^2 + \frac{1}{120} c^4 \Big\}$$

verwandelt den vorstehenden Ausdruck in den folgenden

$$\varDelta A = -\tfrac{1}{6} bc \sin A \left\{1 + \tfrac{11}{120} a^2 - \tfrac{1}{40} b^2 - \tfrac{1}{40} c^2 \right.$$
$$\left. + \tfrac{151}{30240} a^4 + \tfrac{53}{15120} a^2b^2 + \tfrac{53}{15120} a^2c^2 - \tfrac{13}{6048} b^4 + \tfrac{83}{15120} b^2c^2 - \tfrac{13}{6048} c^4 \right\}$$

worin man mittelst der Division durch den Ausdruck

$$\Delta = \tfrac{1}{2} bc \sin A \left\{1 + \tfrac{1}{8} a^2 - \tfrac{1}{24} b^2 - \tfrac{1}{24} c^2 \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{96} a^4 - \tfrac{1}{480} b^4 + \tfrac{1}{144} b^2c^2 - \tfrac{1}{480} c^4 \right\}$$

des Art. 82 die Dreiecksfläche Δ einführen kann. Man bekommt dadurch zum Endresultat, wenn man ausserdem den Kugelhalbmesser R einführt, und zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\mu = \frac{1}{60R^2}, \quad \mu' = \frac{1}{30240R^4}$$

anwendet,

$$\varDelta A = -\tfrac{1}{3}\Delta \{1 - 2\mu a^2 + \mu b^2 + \mu c^2$$
$$- 38\mu' a^4 + \mu' a^2b^2 + \mu' a^2c^2 + 19\mu' b^4 - 2\mu' b^2c^2 + 19\mu' c^4\}$$

$$\varDelta B = -\tfrac{1}{3}\Delta \{1 + \mu a^2 - 2\mu b^2 + \mu c^2$$
$$+ 19\mu' a^4 + \mu' a^2b^2 - 2\mu' a^2c^2 - 38\mu' b^4 + \mu' b^2c^2 + 19\mu' c^4\}$$

$$\varDelta C = -\tfrac{1}{3}\Delta \{1 + \mu a^2 + \mu b^2 - 2\mu c^2$$
$$+ 19\mu' a^4 - 2\mu' a^2b^2 + \mu' a^2c^2 + 19\mu' b^4 + \mu' b^2c^2 - 38\mu' c^4\}$$

deren zweite und dritte durch die blose Vertauschung der Buchstaben aus der ersten erhalten worden sind. Diese Ausdrücke sind bis auf Grössen achter Ordnung vollständig, und geben durch die Addition, gleichwie im Art. 81

$$\varDelta A + \varDelta B + \varDelta C = -\Delta$$

welche Gleichung jedenfalls statt finden muss, wie weit man auch die Entwickelungen fortsetzt.

Zusatz zu Art. 133.

Durch die a. a. O. ausgeführten Differentiationen kommt man, ehe die Bedingungsgleichungen eingeführt werden, auf ziemlich verwickelte Ausdrücke, in welchen, wenn nicht mit der grössten Vorsicht verfahren

wird, leicht etwas übersehen werden kann. Es wird daher, um die Richtigkeit der dort angegebenen Resultate darzuthun, nicht überflüssig sein diese Differentiationen auch auf eine andere Art auszuführen; dieses soll hier geschehen. Löst man die Gleichung (134) in Bezug auf z auf, und setzt

$$h^2 = (C^2 - B)x^2 - 2\,CDx - AB\,y^2 + D^2$$

so wird sie

$$Bz = D - Cx - h$$

da das + Zeichen vor h hier nicht in Betracht kommt. Bezeichnet man nun zur Abkürzung die Differentialquotienten von h nach x durch oben, und die nach y durch unten angehängte Striche, so giebt diese Gleichung sogleich

$$Bp = -C - h' \,;\quad Bq = -h_,$$

$$Br = -h'' \,;\quad Bs = -h'_, \,;\quad Bt = -h_{,,}$$

$$B\left(\frac{dr}{dx}\right) = -h''' \,;\quad B\left(\frac{dr}{dy}\right) = -h''_,$$

$$B\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) = -h^{\text{IV}} \,;\quad B\left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right) = -h'''_, \,;\quad B\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) = -h''_{,,}$$

etc.

$$B\left(\frac{dt}{dx}\right) = -h'_{,,} \,;\quad B\left(\frac{dt}{dy}\right) = -h_{,,,}$$

$$B\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) = -h''_{,,} \,;\quad B\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right) = -h'_{,,,} \,;\quad B\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) = -h_{\text{IV}}$$

etc.

die man beliebig fortsetzen kann. Die obige Gleichung für h^2 giebt ausserdem durch fortgesetzte Differentiationen

$$hh' = (C^2 - B)\,x - CD$$

$$hh'' + (h')^2 = C^2 - B$$

$$hh''' + 3\,h'h'' = 0$$

$$hh^{\text{IV}} + 4\,h'h''' + 3\,(h'')^2 = 0$$

$$hh^{\text{V}} + 5\,h'h^{\text{IV}} + 10\,h''h''' = 0$$

$$hh_, = -ABy$$

$$hh'_, + h'h_, = 0$$

$$hh''_, + 2\,h'h'_, + h''h_, = 0$$

$$hh'''_, + 3\,h'h''_, + 3h''h'_, + h'''h_, = 0$$

$$hh^{\text{IV}}_, + 4\,h'h'''_, + 6\,h''h''_, + 4\,h'''h'_, + h^{\text{IV}}h_, = 0$$

$$hh_{\prime\prime} + (h_{\prime})^2 = -AB$$
$$hh_{\prime\prime}' + h'h_{\prime\prime} + 2\,h_{\prime}'h_{\prime} = 0$$
$$hh_{\prime\prime}'' + 2\,h'h_{\prime\prime}' + 2\,h_{\prime}''h_{\prime} + h''h_{\prime\prime} + 2\,(h_{\prime}')^2 = 0$$
$$hh_{\prime\prime}''' + 3\,h'h_{\prime\prime}'' + 6\,h_{\prime}''h_{\prime}' + 3\,h''h_{\prime\prime}' + 2\,h_{\prime}'''h_{\prime} + h'''h_{\prime\prime} = 0$$

$$hh_{\prime\prime\prime} + 3\,h_{\prime}h_{\prime\prime} = 0$$
$$hh'_{\prime\prime\prime} + h'h_{\prime\prime\prime} + 3\,h_{\prime}h_{\prime\prime}' + 3\,h_{\prime}'h_{\prime\prime} = 0$$
$$hh''_{\prime\prime\prime} + 2\,h'h'_{\prime\prime\prime} + h''h_{\prime\prime\prime} + 3\,h_{\prime}h_{\prime\prime}'' + 6\,h_{\prime}'h_{\prime\prime}' + 3\,h_{\prime}''h_{\prime\prime} = 0$$

$$hh_{IV} + 4\,h_{\prime}h_{\prime\prime\prime} + 3\,(h_{\prime\prime})^2 = 0$$
$$hh'_{IV} + h'h_{IV} + 4\,h_{\prime}h'_{\prime\prime\prime} + 4\,h_{\prime}'h_{\prime\prime\prime} + 6\,h_{\prime\prime}'h_{\prime\prime} = 0$$

$$hh_{V} + 5\,h_{\prime}h_{IV} + 10\,h_{\prime\prime}h_{\prime\prime\prime} = 0$$

Die Substitution von $x = 0$ und $y = 0$, sowohl in die Gleichung für h^2, wie in die vorstehenden Differentiale derselben giebt ohne Mühe

$$h = D$$
$$h' = -C \;;\quad h_{\prime} = 0$$
$$h'' = -\frac{B}{D} \;;\quad h_{\prime}' = 0 \;;\quad h_{\prime\prime} = -\frac{AB}{D}$$
$$h''' = -3\frac{BC}{D^2} \;;\quad h_{\prime}'' = 0 \;;\quad h'_{\prime\prime} = -\frac{ABC}{D^2}$$
$$h^{IV} = -3\frac{B^2}{D^3} - 12\frac{BC^2}{D^3} \;;\quad h_{\prime}''' = 0 \;;\quad h''_{\prime\prime} = -\frac{AB^2}{D^3} - 2\frac{ABC^2}{D^3}$$
$$h^{V} = -45\frac{B^2C}{D^4} - 60\frac{BC^3}{D^4} \;;\quad h_{\prime}^{IV} = 0 \;;\quad h'''_{\prime\prime} = -9\frac{AB^2C}{D^4} - 6\frac{ABC^3}{D^4}$$
$$h_{\prime\prime\prime} = 0$$
$$h'_{\prime\prime\prime} = 0 \;;\quad h_{IV} = -3\frac{A^2B^2}{D^3}$$
$$h''_{\prime\prime\prime} = 0 \;;\quad h'_{IV} = -9\frac{A^2B^2C}{D^4} \;;\quad h_{V} = 0$$

und setzt man diese in die obigen Ausdrücke für p, q, r, s, t nebst deren Differentialen, so gehen daraus dieselben Werthe von p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 nebst den dazu gehörigen Differentialen hervor, die im Art. 133 auf ganz andere Art erhalten worden sind.

Geschichtliche Bemerkung.

In der allgemeinen kurzen Einleitung S. 3 habe ich unter andern gesagt, dass die Aufgabe des zweiten Abschnittes meines Wissens nach,

wenigstens in der neuern Zeit, in Deutschland nicht behandelt worden ist, und wie dieser Satz gedruckt wurde, kannte ich auch keine deutsche Bearbeitung derselben. Erst ganz kürzlich habe ich in Erfahrung gebracht, dass Herr General-Lieutenant Baeyer, dem die Geodäsie so viel verdankt, diese Aufgabe in der neuesten Zeit für kurze geodätische Linien bearbeitet hat, welches ich nicht unterlassen will hier anzuführen.

Druckfehler.

Seite 80 Zeile 13 v. u. lies q'_0 statt g'_0

SECHSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Vierter Band. Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. Preis 7 Thlr. 15 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 24 Ngr.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: über Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 16 Ngr.
P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 2 Thlr.
G. T. FECHNER, Über ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 20 Ngr.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 2 Thlr. 20 Ngr.

SIEBENTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Fünfter Band. Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: über das Verhalten der Weingeistflamme in elekrischer Beziehung. 1859. 20 Ngr.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 2 Thlr. 12 Ngr.
G. T. FECHNER, Über einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 1 Thlr. 26 Ngr.
G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Über Seitenknospen bei Farnen. 1860. 1 Thlr.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 2 Thlr. 20 Ngr.

ACHTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Dritter Band. Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

H. C. VON DER GABELENTZ, die Melanesischen Sprachen nach ihrem grammatischen Bau und ihrer Verwandtschaft unter sich und mit den Malaiisch-Polynesischen Sprachen. 1860. 2 Thlr. 20 Ngr.
G. FLÜGEL, die Classen der Hanefitischen Rechtsgelehrten. 1860. 24 Ngr.
JOH. GUST. DROYSEN, das Stralendorffische Gutachten. 1860. 24 Ngr.
H. C. VON DER GABELENTZ, über das Passivum. Eine sprachvergleichende Abhandlung. 1860. 28 Ngr.
TH. MOMMSEN, die Chronik des Cassiodorus Senator v. J. 519 n. Chr. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.
OTTO JAHN, über Darstellungen griechischer Dichter auf Vasenbildern. Mit 8 Tafeln. 1861. 2 Thlr.

NEUNTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Sechster Band. Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 16 Ngr.
W. G. HANKEL, Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 12 Ngr.
P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 3 Thlr.
G. METTENIUS, über den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 1 Thlr. 14 Ngr.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 1 Thlr.

ZEHNTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Vierter Band. Mit 2 Tafeln. hoch 4. 1865. Preis 6 Thlr.

J. OVERBECK, Beiträge zur Erkenntniss und Kritik der Zeusreligion. 1861. 28 Ngr.
G. HARTENSTEIN, Locke's Lehre von der menschlichen Erkenntniss in Vergleichung mit Leibnitz's Kritik derselben dargestellt. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.
WILHELM ROSCHER, Die deutsche Nationalökonomik an der Gränzscheide des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts. 1862. 20 Ngr.
JOH. GUST. DROYSEN, Die Schlacht von Warschau 1656. Mit 1 Taf. 1863. 1 Thlr. 14 Ngr.
AUG. SCHLEICHER, Die Unterscheidung von Nomen und Verbum in der lautlichen Form. 1865. 24 Ngr.
J. OVERBECK, über die Lade des Kypselos. Mit 1 Tafel. 1865. 28 Ngr.

ELFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Siebenter Band. Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. Preis 5 Thlr. 20 Ngr.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 3 Thlr.
G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 1 Thlr. 6 Ngr.
P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und andern theils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 20 Ngr.
W. G. HANKEEL, elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 28 Ngr.

ZWÖLFTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Fünfter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:
K. NIPPERDEY, die leges Annales der Römischen Republik. 1865. 24 Ngr.

DREIZEHNTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Achter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:
P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 1 Thlr. 26 Ngr.

Leipzig, August 1865. **S. Hirzel.**

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.


32044027938836